Cours Recherche Opérationnelle:

Université Cheikh Anta Diop (UCAD) de Dakar

Faculté des Sciences Economiques et de Gestion (FASEG)

Département de Mathématiques de la Décision (DMD)

Master 1 Sciences Économiques et de Gestion

Pr. Babacar Mbaye NDIAYE - Dr. Mouhamadou A.M.T. Baldé, **Année 2021-2022**.

Laboratoire de Mathématiques de la Désicion et d'Analyse Numérique (LMDAN)

babacarm.ndiaye_ mouhamadouamt.balde@ucad.edu.sn, http://lmdan.ucad.sn

Notes

Ces notes de cours correspondent à un enseignement de quatrième année de la FASEG. Ce cours est le résultat d'une réflexion technique pédagogique dont nous espèrons qu'il apportera aux étudiants une stimulation intellectuelle et un encouragement à persévérer, chaque fois que la compréhension d'un phénomène économique leur posera des difficultés.

Bien qu'ayant relu attentivement toutes les notes, il reste plusieurs imperfections. Nous demandons aux étudiants de nous en excuser, et de nous les signaler afin d'en améliorer la qualité. Leurs camarades de l'année prochaine leur en seront reconnaissants.

Contents

1 PROGRAMMATION LINÉAIRE EN VARIABLES CONTINUES: MODÉLISATION ET RÉSOLUTION **4**

1.1 Petits exemples pratiques 4

1.2 Définition et formulation d'un problème de programmation linéaire . 8

1.2.1 Définition d'un programmation linéaire 8

1.2.2 Forme algébrique d'un programme linéaire 10

1.2.3 Forme matricielle d'un programme linéaire 11

1.3 Interprétation économique d'un programme linéaire 12

1.4 Résolution graphique 13

1.5 Méthode du simplexe 19

1.5.1 Forme standard 19

1.5.2 Correspondance base-sommet, changement de base, itération 22

1.5.3 Principe de la méthode: un peu de théorie 24

1.5.4 Critères de Dantzig et test d'optimalité 26

1.5.5 Application à l'exemple 1 27

1.5.6 Cas particuliers et compléments 31

1.5.7 Base de départ et variables artificielles 31

1.6 Dualité 37

1.6.1 Variable duale associée à une contrainte 38

1.6.2 Dual d'un programme linéaire 38

1.6.3 Théorème de la dualité 40

1.6.4 Application à l'exemple 1 40

1.7 Analyse de sensibilité 41

1.7.1 Variation d'un coefficient de la fonction objectif 42

1.7.2 Variation d'un coefficient du second membre 43

2 PROGRAMMATION LINÉAIRE EN NOMBRES ENTIERS **45**

2.1 Formulation 45

2.2 Coupes de gomory 47

2.3 Problème du sac-à-dos simple 56

2.4 Problème du sac-à-dos multidimensionnel 58

2.5 Problèmes de tournées de véhicules 58

2.6 Problème de localisation (location/allocation problem) 59
2.7 Problèmes de recouvrement (Set Covering Problem - SCP) 61

A Exercices corrigés **63**

B Quelques exercices **69**

C Quelques devoirs et examens corrigés **80**

D Les principaux solvers - modeleurs **98**
D.1 Solveurs libres 98
D.2 Solveurs commerciaux 99
D.3 Modeleurs 100

1 PROGRAMMATION LINÉAIRE EN VARIABLES CONTINUES: MODÉLISATION ET RÉSOLUTION

Nous abordons dans ce chapitre un type particulier de modélisation. A l'opposé du modèle économique, un problème d'optimisation va être représenté par un problème de **programmation mathématique** : les variables de décision sont des variables numériques, la représentation des décisions possibles et du critère fait appel à des équations ou fonctions mathématiques. Plus précisément, nous introduisons ici le problème particulier de programmation linéaire en variables continues (dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}^n$).

Dans la section 1.1 nous énonçons quelques exemples d'application, suivi de la section 1.2 où nous présentons la définition d'un problème de programmation linéaire en variables continues. L'interprétation économique de ce programme linéaire sera donnée dans la section 1.3. Lorsqu'il n'y a que deux (2) variables de décision, un problème linéaire peut être résolu de manière purement graphique. C'est ce que nous verrons dans la section 1.4. Lorsqu'il y a un plus grand nombre de variables (supérieur ou égal à trois (3)), un algorithme mis en oeuvre sous la forme d'un programme informatique s'avère nécessaire. Nous choisissons l'algorithme du Simplexe que nous verrons dans la section 1.5. Dans la section 1.6, nous examinerons la dualité en programmation linéaire. Enfin, la section 1.7 traite une question très importante, à savoir la sensibilité de la solution à des modifications de données. On parle d'analyse post-optimale.

1.1 Petits exemples pratiques

Le modèle type de programmation linéaire peut être retenu pour représenter de nombreux problèmes. Dans la suite de cette section, nous illustrons trois (3) exemples de modèle (de dimension 2) permettant de comprendre les types de programmes que nous aurons à étudier dans ce chapitre. D'autres exemples (de dimension 2, 3 ou plus) sont ajoutés en Annexe de ce cours et en Travaux Dirigés (TD).

Exemple 1 : L'entreprise SIMPA (Société Industrielle et Moderne des Plastiques Africains) du Sénégal fabrique deux(2) types de produits P_1 et P_2 (Flexible film/Sacherie et Rigide/Semi-rigide) à partir de deux(2) ressources: la main d'oeuvre (employés/machines) et des matériaux (polytéréphtalate d'éthylène (PET)). Par ailleurs, chaque ressource est disponible en quantité limitée. L'entreprise SIMPA ne dispose que de 200 heures pour la main d'oeuvre et 150 kg de matériaux par jour. La main d'oeuvre et les matériaux nécessaire pour la production d'une unité des produit est donné dans le tableau suivant:

	P_1	P_2	disponibilité
main d'oeuvre (h/unité)	7	3	200
matériaux (Kg/unité)	4	4	150

Les deux produits P_1 et P_2 rapportent à la vente respectivement des bénéfices de 40 000 FCFA et 20 000 FCFA par unité.

Question: Quelles quantités de produits P_1 et P_2 doit produire l'entreprise SIMPA afin de maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits ?

Formuler le problème sous forme de programme linéaire permettant à l'entreprise SIMPA de maximiser le profit quotidien venant de la vente des 2 produits.

✓ **Modélisation du problème**: Nous examinons dans l'ordre la représentation des variables de décisions, des contraintes et du critère à optimiser.

Les variables de décisions: nous appelons par x_1 et x_2 les quantités de produits P_1 et P_2 à fabriquées, respectivement.

Les contraintes: il s'agit des contraintes limitant la production des produits. La première est la limitation du nombre d'heures de main d'oeuvre: il faut 7 heures pour fabriquer une unité de produit P_1 et 3 heures pour fabriquer une unité de produit P_2. Le nombre d'heures total disponible pour la fabrication de ces 2 produits est de 200 heures. On doit donc imposer : $7x_1 + 3x_2 \leq 200$.

De même, il faut 4 kg de matériaux pour fabriquer chacun des produits P_1 et P_2, et le nombre de matérieux total disponible pour leur fabrication est de 150. Ce qui se traduit par : $4x_1 + 4x_2 \leq 150$.

L'ensemble des décisions possibles est caractérisé par l'ensemble des valeurs de x_1 et x_2 vérifiant :

$$7x_1 + 3x_2 \leq 200$$

$$4x_1 + 4x_2 \leq 150$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Le critère : on souhaite maximiser le profit quotidien de l'entreprise SIMPA (venant de la vente des 2 produits) représenté par : $40000x_1 + 20000x_2$.

Le problème est donc modélisé par le problème de programmation mathématique suivant :

$$\begin{aligned} \max f(x) = \ & 40000x_1 + 20000x_2 \\ s.c. \quad & 7x_1 + 3x_2 \leq 200 \\ & 4x_1 + 4x_2 \leq 150 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Exemple 2 : Une entreprise spécialisée dans la fabrication de matériels informatiques, propose à son catalogue d'ordinateurs des centaines de référence. Pour simplifier, on ne s'intéresse ici qu'à deux types d'ordinateurs : le Core i3 et le Core i7. Chacun d'eux comporte un processeur (le même) mais les deux modèles diffèrent en particulier par le nombre de barrettes mémoires. Plus précisément, le Core i3 comporte 2 barrettes alors que le Core i7 en comporte 6. Le marché pour ces composants est tel qu'on ne peut espérer acheter auprès des fournisseurs habituels plus de 10 000 processeurs pour le trimestre à venir et plus de 48 000 barrettes. Une autre limitation intervient sur la production: l'assemblage est caractérisé, en particulier, par une opération délicate, qui pour le Core i3 est de 3 minutes alors que pour le Core i7 elle n'est que d'une minute. On ne dispose a priori pour l'assemblage de ces deux types de machines que de 24 000 minutes pour le trimestre à venir. Enfin, compte tenu des conditions actuelles du marché, on peut espérer retirer un profit de 40 000 FCFA sur le Core i3 et de 80 000 FCFA sur le Core i7. L'objectif est de déterminer les quantités de chacun des deux types d'ordinateurs à fabriquer de manière à obtenir le plus grand profit possible.

✓ **Modélisation du problème**: Nous examinons dans l'ordre la représentation des variables de décisions, des contraintes et du critère à optimiser.

Les variables de décisions: les décisions concernent les quantités à fabriquer, ce qui se représente naturellement par deux nombres positifs x_1 pour le Core i3 et x_2 pour le Core i7.

Soit : x_1 la quantité pour le Core i3 à fabriquer et x_2 la quantité pour le Core i7 à fabriquer.

Les contraintes: il s'agit de représenter les différentes contraintes limitant la production de ces deux types d'ordinateur. La première porte sur la limitation du nombre de processeurs disponibles : chaque machine utilise un processeur et on peut en disposer de 10000. On doit donc imposer : $x_1 + x_2 \leq 10000$.

De même, le nombre de barrettes est limité. Compte tenu du nombre de barrettes dans chacun des 2 ordinateurs et du nombre de barrettes disponibles, cette contrainte se traduit par : $2x_1 + 6x_2 \leq 48000$. Enfin, la contrainte portant sur le temps d'assemblage s'écrit : $3x_1 + x_2 \leq 24000$.

L'ensemble des décisions possibles est donc caractérisé par l'ensemble des valeurs de x_1 et x_2 vérifiant

:

$$x_1 + x_2 \leq 10000$$
$$2x_1 + 6x_2 \leq 48000$$
$$3x_1 + x_2 \leq 24000$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Le critère : on souhaite maximiser le profit de l'entreprise représenté par : $40000x_1 + 80000x_2$.

Le problème initial est donc modélisé par le problème de programmation mathématique suivant :

$$\begin{array}{rl} \max f(x) = & 40000x_1 + 80000x_2 \\ s.c. & x_1 + x_2 \leq 10000 \\ & 2x_1 + 6x_2 \leq 48000 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 24000 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Exemple 3 : Un groupement d'intérêt économique (GIE) peut fabriquer un même bien selon deux techniques différentes de production utilisant les services d'une même machine et de la main d'oeuvre. Le nombre d'heures nécessaire pour la production d'une unité de bien est donné dans le tableau suivant:

	machine	main d'oeuvre
première technique	0.5	2
deuxième technique	1.5	1.5

On suppose que la capacité d'usinage de la machine est de 12 heures et que le nombre d'heures de travail disponibles est de 15 heures. Le GIE cherche à maximiser sa marge sur coût variable. Les marges unitaires sont de 190000 FCFA, 260000 FCFA selon que le bien est fabriqué à l'aide de la première ou deuxième technique.

✓ **Modélisation du problème**: Nous examinons dans l'ordre la représentation des variables de décisions, des contraintes et du critère à optimiser.

Les variables de décisions: nous appelons par x_1 et x_2 les quantités de bien fabriquées selon l'une des deux techniques.

Les contraintes: il s'agit de représenter les différentes contraintes limitant la production de bien.

La première est la limitation du nombre d'heures d'usinage de la machine : la première technique nécessite une demi heure, la deuxième une heure et demi et on peut en disposer de 12 heures. On doit donc imposer : $0.5x_1 + 1.5x_2 \leq 12$.
De même, le nombre d'heures de main d'oeuvre est limité à 15 heures. La première technique nécessite deux heures tandis que la deuxième d'une heure et demi. Ce qui se traduit par : $2x_1 + 1.5x_2 \leq 15$.
L'ensemble des décisions possibles est donc caractérisé par l'ensemble des valeurs de x_1 et x_2 vérifiant :

$$\begin{aligned} &0.5x_1 + 1.5x_2 \leq 12 \\ &2x_1 + 1.5x_2 \leq 15 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Le critère : le GIE cherche à maximiser sa marge sur coût variable représenté par : $190000x_1 + 260000x_2$.

Le problème initial est donc modélisé par le problème de programmation mathématique suivant :

$$\begin{aligned} \max\ f(x) = {} & 190000x_1 + 260000x_2 \\ s.c. \qquad & 0.5x_1 + 1.5x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 1.5x_2 \leq 15 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

• Tous les trois(3) modèles obtenus sont des exemples de **problème de programmation linéaire**.

1.2 Définition et formulation d'un problème de programmation linéaire

1.2.1 Définition d'un programmation linéaire

En mathématiques, les problèmes de Programmation Linéaire (PL) sont des **problèmes d'optimisation où la fonction objectif et les contraintes sont toutes linéaires**. La programmation linéaire désigne également la manière de résoudre les problèmes de PL.
C'est un domaine central de l'optimisation, car les problèmes de PL sont les problèmes d'optimisation les plus faciles (toutes les contraintes y étant linéaires). Beaucoup de problèmes réels de recherche opérationnelle peuvent être exprimés comme un problème de PL (comme les trois exemples de la

section 1.1). Pour cette raison un grand nombre d'algorithmes pour la résolution d'autres problèmes d'optimisation sont fondés sur la résolution de problèmes linéaires.

Remarque 1.1. *Le terme Programmation Linéaire suppose que les solutions à trouver doivent être représentées en variables réelles. S'il est nécessaire d'utiliser des variables discrètes dans la modélisation du problème, on parle alors de Programmation Linéaire en Nombres Entiers (PLNE). Il est important de savoir que ces derniers sont nettement plus difficiles à résoudre que les PL à variables continues.*

La formulation d'un problème d'optimisation comporte toujours les trois étapes suivantes :

1. choix des variables du modèle,
2. formulation de l'objectif (ou critère),
3. formulation des contraintes.

✓ La première étape consiste à **choisir les variables** du problème.

Définition 1.1. *On appelle variable toute quantité utile à la résolution du problème dont le modèle doit déterminer la valeur.*

Cette définition permet de différencier les variables des paramètres, qui sont des données qui peuvent varier, par exemple d'une période à l'autre ou d'un scénario à l'autre.

✓ La deuxième étape consiste à **formuler mathématiquement l'objectif**.

Définition 1.2. *On appelle fonction objectif d'un problème d'optimisation le critère de choix entre les diverses solutions possibles.*

✓ La troisième étape est la **formulation les contraintes du problème**.

Définition 1.3. *On appelle contraintes du problème toutes les relations limitant le choix des valeurs possibles des variables.*

Ces relations peuvent être de simples bornes sur les variables. Par exemple, les quantités produites ne peuvent être négatives. Mathématiquement, on peut écrire : $x_1, x_2 \geq 0$.
Elles peuvent être plus complexes comme les contraintes de capacité des ressources.

1.2.2 Forme algébrique d'un programme linéaire

Un problème sera modélisé par un problème de programmation linéaire si :

- les décisions peuvent être représentées par des nombres réels (généralement positifs),
- les contraintes portant sur ces variables peuvent être représentées par des équations ou des inéquations linéaires c'est à dire que les variables n'interviennent qu'au premier degré (pas de carrés, pas de produit de variables),
- le critère de choix peut être représenté par une fonction linéaire des variables que l'on souhaitera minimiser ou maximiser.

La forme générale d'un problème de programmation linéaire de n variables et p contraintes est :

$$\min \ ou \ \max f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

sous les contraintes

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq, \geq \text{ ou } = b_i \quad \text{pour } i = 1, ..., p$$

$$x_j \geq 0, \quad \text{pour } j = 1, ..., n$$

Les coefficients c_j de la fonction objectif, les coefficients a_{ij} du premier membre des contraintes et les seconds membres b_i des contraintes sont **des données** du problème. Les x_j sont **les variables** du problème. Enfin, i représente l'indice de la i^{ieme} contrainte $(i = 1, ..., p)$ et j l'indice de la j^{ieme} variable $(j = 1, ..., n)$.
On notera, dans la suite, ce problème par $(\mathcal{P})$.

Définition 1.4. *Une solution réalisable est un n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ vérifiant toutes les contraintes.*

Définition 1.5. *Une solution optimale est une solution réalisable qui donne à la fonction objectif la plus grande (problème de maximisation) ou la plus petite valeur possible (problème de minimisation) sur l'ensemble des solutions réalisables.*

Définition 1.6. *La valeur maximale (resp : minimale) de la fonction objectif (à ne pas confondre avec la solution optimale) est la plus grande valeur (resp : la plus petite) que peut prendre la fonction objectif sur l'ensemble des solutions réalisables.*

✓ La PL est essentiellement appliquée pour résoudre des problèmes d'optimisation à moyen et long terme (problèmes stratégiques et tactiques, dans le vocabulaire de la recherche opérationnelle).

Les domaines d'application de ces problèmes sont très nombreux aussi bien dans la nature des problèmes abordés (planification et contrôle de la production, distribution dans des réseaux) que dans les secteurs d'industrie: industrie manufacturière, énergie (pétrole, gaz, électricité, nucléaire), transports (aériens, routiers et ferroviaires), télécommunications, industrie forestière, finance.
Les exemples de problème qui relèvent de la programmation linéaire sont fort nombreux. On peut citer :

- les problèmes de mélange : quelle est la composition optimale d'un produit ?
- les problèmes de détermination optimale de production d'une raffinerie,
- les problèmes de planification de production : quand et à quel moment doit-on planifier la production d'un bien,
- les problèmes de transport, généralisation du problème de transport classique,
- les problèmes de planification d'horaires,
- les problèmes de fonctionnement d'une flotte de tankers et la mise en place des produits,
- les problèmes de découpe industrielle,
- etc.

S'il est nécessaire d'utiliser des variables discrètes dans la modélisation du problème, on parle alors de Programmation Linéaire en Nombres Entiers (PLNE).
Un problème de PLNE est un programme linéaire dans lequel il y a la contrainte supplémentaire que les variables sont **entières**. Lorsque les variables entières ne peuvent être que 0 ou 1, on parle de programmation linéaire **0-1 ou binaire**.
On parle de programme linéaire **mixte** lorsque seul un sous-ensemble de variables doivent être entières et les autres réelles.

1.2.3 Forme matricielle d'un programme linéaire

La propriété de linéarité de la fonction objectif et des contraintes permet de représenter un programme linéaire sous forme matricielle. Cette représentation est utile car elle permet d'une part, de mieux comprendre les problèmes rencontrés lors de l'informatisation d'un algorithme du simplexe. D'autre part, elle permet d'expliquer de façon plus synthétique certains développements plus théoriques liés à la méthode du simplexe (cf. section 1.5) et aux propriétés de la dualité (cf. section

1.6).

Soit n le nombre de variables et p le nombre de contraintes. Posons: $c^T = (c_1, c_2, ..., c_n)$[1] le vecteur des coefficients de la fonction objectif; $b^T = (b_1, b_2, ..., b_p)$ le vecteur du second membre, c'est à dire des bornes supérieures. Soit A la matrice de p lignes et n contraintes, notée $A(p, n)$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

et $x^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le vecteur des variables de décision.

La forme matricielle d'un programme linéaire s'écrit alors en trois (3) lignes:

$$\begin{aligned} &\max \ c^T x \\ &s.c. \quad Ax \leq b \\ &\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Définition 1.7. *L'ensemble réalisable C est l'ensemble défini par:*

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \leq b \ et \ x \geq 0\}$$

Remarque 1.2. *L'ensemble réalisable C est appelé hyperplan de $\mathbb{R}^n$. C'est une intersection finie d'hyperplans.*

Remarque 1.3. *On peut aussi écrire le problème $(\mathcal{P})$ sous la forme:*

$$\begin{aligned} &\max \ c^T x \\ &s.c. \\ &\quad x \in C \end{aligned}$$

1.3 Interprétation économique d'un programme linéaire

On considère le problème de programmation linéaire $(\mathcal{P})$ mis sous la forme:

$$\begin{aligned} \max z = \ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \forall i = 1, ..., p \\ & x_j \geq 0, \qquad \forall j = 1, ..., n \end{aligned}$$

[1] c^T désigne la transposé du vecteur c

Cette formulation correspond à la situation suivante:

Une entreprise exerce un ensemble de n activités j. Chacune de ces activités consomme une certaine quantité de ressources i. On connait la quantité b_i de ressource i disponible pour chacune des m ressources. Chaque activité j peut être exercée avec une quantité x_j et on donne la consommation a_{ij} de la ressource i utilisée pour la production d'une unité de l'activité j. Et c_j est le profit unitaire que l'on tire de l'activité j.

Résoudre le problème $(\mathcal{P})$, c'est déterminer les quantités x_j (non négatives) auxquelles il faut exercer les activités j de manière que:

- pour toute ressource i la quantité $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ de ressource i ne dépasse pas b_i (ne pas consommer plus de ressources que l'on en dispose).
- le profit total $\sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ soit maximum (maximiser le profit de la vente).

1.4 Résolution graphique

De manière très générale, la résolution d'un problème de programmation linéaire nécessite la mise en oeuvre d'un algorithme. Nous en verrons le principe dans la section 1.5 suivante.

Lorsqu'il n'y a que **deux variables de décision**, un problème linéaire peut être résolu de manière purement graphique. C'est ce que nous verrons dans cette partie.

Cette résolution graphique permet de mettre en évidence certaines propriétés que possède n'importe quel problème de programmation linéaire.

✓ Considérons le problème de l'**exemple 1** :

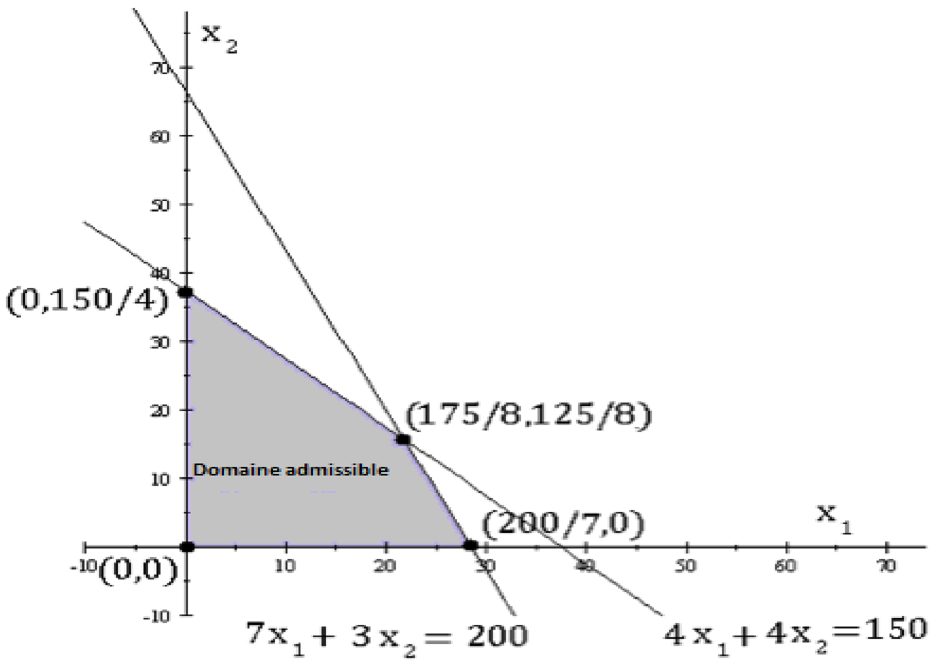
$$\begin{aligned} \max f(x) = \ & 40000x_1 + 20000x_2 \\ s.c. \qquad & 7x_1 + 3x_2 \leq 200 \\ & 4x_1 + 4x_2 \leq 150 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Souvenez vous, vous avez certainement représenté au collège des droites dans le plan. Peut-être avez vous appris à cette époque la notion de coefficient directeur dans la représentation.

A chaque couple de variables x_1 et x_2, on associe un point du plan dont les coordonnées correspondent aux valeurs des variables. Les variables étant positives, ces points sont situés dans l'orthant positif (le quart Nord-Est du plan) ou $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

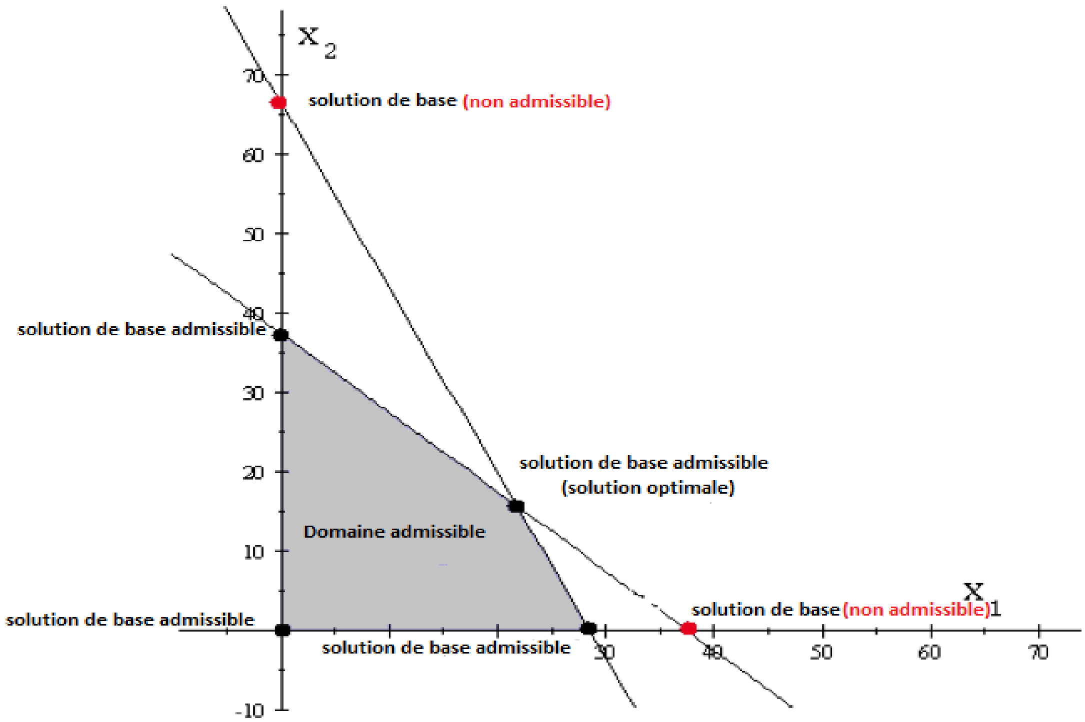
Chaque contrainte permet de délimiter une partie du plan. Par exemple, la droite (Δ_1) d'équation $7x_1 + 3x_2 = 200$ définit 2 demi-plans. Au-dessus de cette droite (Δ_1), les coordonnées des points du plan vérifient $7x_1 + 3x_2 > 200$. On est donc conduit à exclure ces points.
On fait de même pour l'autre contrainte, et on trace la droite d'équation:
$\Delta_2 : 4x_1 + 4x_2 = 150$ et on élimine les points situés au dessus de cette droite.

Les solutions réalisables du problème correspondent aux points du plan situés à l'intérieur du polyèdre (appelée domaine admissible ou domaine réalisable) et sur ses bords.



Il s'agit maintenant de déterminer parmi tous ces points celui ou ceux qui correspondent à la plus grande valeur possible pour la fonction objectif $z = f(x) = f(x_1, x_2) = 40000x_1 + 20000x_2$.
Considérons la droite d'équation $\Delta : 40000x_1 + 20000x_2 = k$ où k est une constante. Tous les points situés sur cette droite donnent à l'expression $40000x_1 + 20000x_2$ la même valeur k. Ils sont équivalents du point de vue du profit.
Si on déplace cette droite vers la droite, la valeur de k augmente. La valeur limite pour k est obtenue pour la droite passant par le point A qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 175/8 \\ 125/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.875 \\ 15.625 \end{pmatrix}$.
La valeur optimale est de $f(A) = 40000 * 175/8 + 20000 * 125/8 = 875000 + 312500 =$ 1 187 500.

Remarque 1.4. *Graphiquement, ce sont les points correspondant aux points d'intersection des droites qui définissent la région réalisable:*



Les solutions (ou points) situées sur le bord (ou frontière) de l'ensemble admissible sont appelés des solutions de base possibles (admissibles) et non admissibles s'ils sont à l'extérieur du domaine admissible. Au moins une des solutions admissibles est une solution optimale. Si deux solutions sont ensuite admissibles, alors tous les points sur le bord reliant ces deux solutions le sont également.

✓ `Interprétation`: Pour l'entreprise SIMPA, ceci signifie que la répartition optimale entre les deux types de produits est de 21.875 pour le produit P_1 et 15.625 pour le produit P_2. Le profit quotidien est de 1 187 500 FCFA.

Nous obtenons pour les contraintes de la main d'oeuvre et des matériaux: $(7\times 175/8)+(3\times 125/8) = (1225+375)/8 = 200$ (main d'oeuvre), $(4\times 175/8)+(4\times 125/8) = (175+125)/2 = 150$ (matériaux). On dit que les deux contraintes sont saturées ou liées : elles sont vérifiées avec égalité à l'optimum. Tout le nombre d'heures de main d'oeuvre et tous les matériaux disponibles sont utilisés.

✓ **Pour l'exemple 2** :

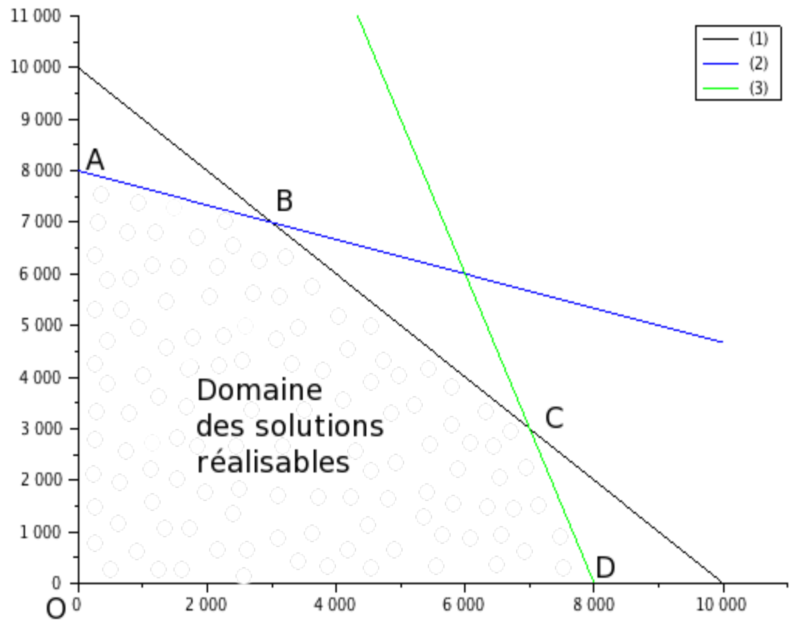
$$\begin{aligned}
\max f(x) = &\ 40000x_1 + 80000x_2 \\
s.c. \quad & x_1 + x_2 \leq 10000 \\
& 2x_1 + 6x_2 \leq 48000 \\
& 3x_1 + x_2 \leq 24000 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Chaque contrainte permet de délimiter une partie du plan. Par exemple, la droite (Δ_1) d'équation $x_1 + x_2 = 10000$ définit 2 demi-plans. Au-dessus de cette droite (Δ_1), les coordonnées des points du plan vérifient $x_1 + x_2 > 10000$. On est donc conduit à exclure ces points.

On fait de même pour les 2 autres contraintes. On trace les droites d'équation:

Δ_2 : $2x_1 + 6x_2 = 48000$ et Δ_3: $3x_1 + x_2 = 24000$ et on élimine les points situés au dessus de ces droites.

Les solutions réalisables du problème correspondent aux points du plan situés à l'intérieur du polyèdre OABCD et sur ses bords.



Il s'agit maintenant de déterminer parmi tous ces points celui ou ceux qui correspondent à la plus grande valeur possible pour la fonction objectif $z = f(x) = f(x_1, x_2) = 40000x_1 + 80000x_2$

Considérons la droite d'équation Δ : $40000x_1 + 80000x_2 = k$ où k est une constante. Tous les points situés sur cette droite donnent à l'expression $40000x_1 + 80000x_2$ la même valeur k. Ils sont équivalents du point de vue du profit.

Si on déplace cette droite vers la droite, la valeur de k augmente. La valeur limite pour k est obtenue pour la droite passant par le point B.

On peut conclure que sur l'ensemble du domaine des solutions réalisables, celle qui donne la plus grande valeur à la fonction objectif correspond au point B dont les coordonnées peuvent être calculées, comme point d'intersection des droites Δ_1 et Δ_2 ($\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{B = (3000, 7000)\}$. Ainsi, la solution optimale du problème est $x_1 = 3000, x_2 = 7000$. Nous noterons la solution optimale par $(x_1^*, x_2^*) = (3000, 7000)$. La valeur maximale de la fonction objectif est : $z = f(x_1^*, x_2^*) = (40000 * 3000) + (80000 * 7000)$=600 800 000.

✓ `Interprétation`: Pour l'entreprise, ceci signifie que la répartition optimale entre les deux types d'ordinateurs est de 3 000 ordinateurs de type Core i3 et 7 000 ordinateurs de type Core i7 avec un profit maximal de 600 800 000 €.

Nous obtenons pour les ressources: $3000 + 7000 = 10000$ (processeurs), $(2 \times 3000) + (6 \times 7000) = 6000 + 42000 = 48000$ (barettes) et $(3 \times 3000) + 7000 = 10000 < 24000$ (assemblage).

On dit que les deux premières contraintes sont saturées ou liées : elles sont vérifiées avec égalité à l'optimum alors que la troisième contrainte est non saturée ou non liée : il y a une marge entre la valeur de son premier et celle de son second membre à l'optimum.

L'analyse de cette solution montre que tous les processeurs et toutes les barrettes sont utilisés, mais qu'il reste du temps d'assemblage disponible.

✓ **Pour l'exemple 3** :

$$\begin{aligned} \max \ f(x) = \ & 190000x_1 + 260000x_2 \\ s.c. \qquad & 0.5x_1 + 1.5x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 1.5x_2 \leq 15 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

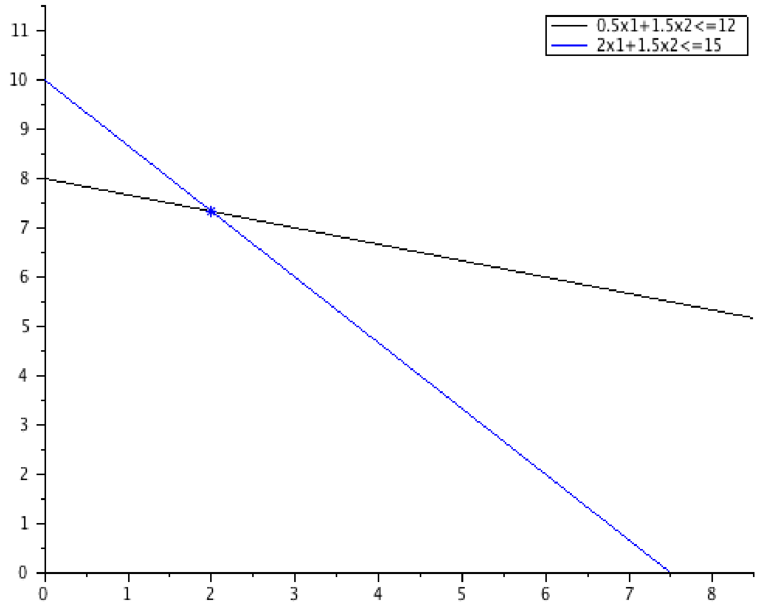
A chaque couple de variables x_1 et x_2, on associe un point du plan dont les coordonnées correspondent aux valeurs des variables. Les variables étant positives, ces points sont situés dans l'orthant positif (le quart Nord-Est du plan) ou $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

Chaque contrainte permet de délimiter une partie du plan. Par exemple, la droite (Δ_1) d'équation $0.5x_1+1.5x_2 = 12$ définit 2 demi-plans. Au-dessus de cette droite (Δ_1), les coordonnées des points du plan vérifient $0.5x_1+1.5x_2 > 12$. On est donc conduit à exclure ces points.

On fait de même pour l'autre contrainte, et on trace la droite d'équation:

$\Delta_2 : 2x_1 + 1.5x_2 = 15$ et on élimine les points situés au dessus de cette droite.

Les solutions réalisables du problème correspondent aux points du plan situés à l'intérieur du polyèdre (appelée domaine admissible ou domaine réalisable) et sur ses bords.



Il s'agit maintenant de déterminer parmi tous ces points celui ou ceux qui correspondent à la plus grande valeur possible pour la fonction objectif $z = f(x) = f(x_1, x_2) = 190000x_1 + 260000x_2$.
Considérons la droite d'équation Δ : $190000x_1 + 260000x_2 = k$ où k est une constante. Tous les points situés sur cette droite donnent à l'expression $190000x_1 + 260000x_2$ la même valeur k. Ils sont équivalents du point de vue du profit.
Si on déplace cette droite vers la droite, la valeur de k augmente. La valeur limite pour k est obtenue pour la droite passant par le point A qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 22/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7.33 \end{pmatrix}$. La valeur optimale est de $f(A) = 190000 * 2 + 260000 * 22/3 = 380000 + 1906600.67$= 2 200 866.67.

✓ `Interprétation`: Pour le GIE, ceci signifie que la répartition optimale du bien est de 2 biens selon la première technique et 22/3 selon la deuxième technique. Le profit maximal est de 2 200 866.67 FCFA.
Nous obtenons pour les contraintes de la machine et de la main d'oeuvre: $(0.5 \times 2) + (1.5 \times 22/3) = 1 + 11 = 12$ (usinage machine), $(2 \times 2) + (1.5 \times 22/3) = 4 + 11 = 15$ (main d'oeuvre).
On dit que les deux contraintes sont saturées ou liées : elles sont vérifiées avec égalité à l'optimum. Tout le temps disponible (nombre d'heures nécessaire) pour la production d'une unité de bien est utilisé.

1.5 Méthode du simplexe

La résolution graphique ne concerne que des problèmes avec 2 variables alors que les problèmes réels peuvent en avoir plusieurs milliers, voire centaine de milliers. Nous allons dans cette section, illustrer le principe d'un algorithme de résolution : l'algorithme du simplexe, du à Dantzig ([5, 6]). On considère le problème de l'exemple 1 de la section 1.1 :

$$\begin{aligned} \max f(x) = &\ 40000x_1 + 20000x_2 \\ s.c. \qquad &\ 7x_1 + 3x_2 \leq 200 \\ &\ 4x_1 + 4x_2 \leq 150 \\ &\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cette formulation est appelé **forme canonique** sous la forme $(max, \leq)$. Les variables x_1 et x_2 sont appelées « **variables initiales** ».

Nous verrons dans cette section ci-dessous, la mise du problème sous forme standard.

1.5.1 Forme standard

Dans un premier temps, on transforme le problème pour qu'il n'y ait que des contraintes d'égalité afin de manipuler des systèmes d'équations et non d'inéquations.

Définition 1.8. *Un problème de programmation linéaire est dit sous forme standard si toutes les contraintes sont des contraintes d'égalité et toutes les variables sont positives.*

Considérons la première contrainte :

$$7x_1 + 3x_2 \leq 200$$

On introduit une variable positive x_3 appelée « **variable d'écart** » qui mesure l'écart entre le deuxième et le premier membre de l'inégalité. On obtient :

$$7x_1 + 3x_2 + x_3 = 200 \quad \text{avec} \quad x_3 \geq 0.$$

On fait de même dans la seconde contrainte :

- $4x_1 + 4x_2 \leq 150$ devient $4x_1 + 4x_2 + x_4 = 150$ avec $x_4 \geq 0$

Le problème initial est maintenant sous forme standard :

$$\begin{aligned} \max f(x) = &\ 40000x_1 + 20000x_2 \\ s.c. \qquad &\ 7x_1 + 3x_2 + x_3 = 200 \\ &\ 4x_1 + 4x_2 + x_4 = 150 \\ &\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Remarque 1.5. *Les coefficients des variables d'écart dans la fonction objectif sont nuls.*

✓ **Généralisation**

Pour simplifier les notations, on peut noter les variables d'écarts par x_{n+i} $\forall i = 1, ..., p$.

Si le problème d'optimisation comporte n variables et p contraintes de type $\leq$, alors la forme générale de la forme standard est :

$$\text{min } ou \text{ max} f(x) = \sum_{j=1}^{n+p} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + ... + c_{n+p}x_{n+p}$$

sous les contraintes

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \quad \text{pour } i = 1, ..., p$$

$$x_j \geq 0, \qquad \text{pour } j = 1, ..., n + p$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} &\text{min } ou \text{ max } c^T x \\ &s.c. \quad Ax = b \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

avec $c, x \in \mathbb{R}^{n+p}$, $b \in \mathbb{R}^p$ et $A(p, n + p)$.

Si une contrainte (i) est de type $\geq$, c'est à dire: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$. Alors en introduisant une variable d'écart x_{n+i} positive ou nulle au premier membre, on obtient une condition équivalente s'écrivant sous la forme d'une égalité:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$$

La recherche de solutions pour ce type de contrainte sera étudiée dans la section 1.5.7.

✓ **Exemple** : Soit le programme suivant:

$$\begin{aligned} \text{max } z = \; & x_1 + x_2 \\ s.c. \quad & -8x_1 + x_2 \geq -40 \\ & x_1 + x_2 \geq 8 \\ & -x_1 - 2x_2 \geq -10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

On voit que ce programme présente des contraintes d'inégalités du type "$\geq$", donc pour l'écrire sous forme standard il suffit, pour chaque contrainte de ce type, d'ajouter une variable d'écart dans le second membre puis de le transposer dans le premier membre ou plus simplement de retrancher une variable d'écart dans le premier membre. Ainsi on obtient la forme standard :

$$\begin{aligned}
\max \ z = & \ x_1 + x_2 \\
s.c. \qquad & -8x_1 + x_2 - x_3 = -40 \\
& x_1 + x_2 - x_4 = 8 \\
& -x_1 - 2x_2 - x_5 = -10 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

L'ajout des variables dites artificielles sera étudié dans la section section 1.5.7

Proposition 1.1. *Tout problème de programmation linéaire peut se mettre au choix sous la forme canonique ou sous la forme standard.*

Preuve: Il suffit de faire les observations suivantes.

1. Minimiser $f(x)$ c'est maximiser $-f(x)$ et changer le signe du résultat obtenu.
2. L'inégalité $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ est équivalente à l'égalité $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$ avec $x_{n+i} \geq 0$.
3. L'égalité $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ est équivalente aux deux inégalités $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ et $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq -b_i$.
4. Si x_j est une variable de signe quelconque, on peut lui substituer la différence $x_j^{'} - x_j^{''}$ ($x_j^{'} \geq 0$ et $x_j^{''} \geq 0$).

✓ Pour **l'étude de solutions particulières**, on peut considérons le système d'équations :

$$7x_1 + 3x_2 + x_3 = 200$$

$$4x_1 + 4x_2 + x_4 = 150$$

Ce système possède une infinité de solutions. Les solutions réalisables du problème sont les solutions positives de ce système d'équations.

On peut considérer une première solution réalisable, obtenue en donnant à x_1 et x_2 la valeur 0.

Première solution:

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 200$ et $x_4 = 150$ et $z = 0$.

Test d'optimalité pour la première solution: En examinant la fonction objectif ($z = 40000x_1 + 20000x_2$), on constate que si on augmente la valeur de x_1 ou celle de x_2 ou celle de x_3, la valeur de la fonction augmentera : la première solution n'est pas optimale.

Construction de la deuxième solution: On construit une nouvelle solution en augmentant une seule des deux variables x_1 ou x_2 laissant les deux autres nulles. Le choix entre x_1 et x_2 peut être fait en considérant leur coefficient dans la fonction objectif.

Le coefficient de x_1 est de 200 (c'est le plus grand) alors que celui de x_2 n'est que de 150.

En application du «premier critère de Dantzig» (qu'on verra dans la section 1.5.4), on choisit d'augmenter x_1 tout en laissant x_2 nulle.

1.5.2 Correspondance base-sommet, changement de base, itération

✓ Correspondance base-sommet: l'algorithme du simplexe et les solveurs (programmes informatiques le mettant en oeuvre) ne travaillent que sur des contraintes à l'égalité, donc sur la forme standard[2].

Dans la méthode du simplexe, le cheminement se fait en se déplaçant d'un sommet du polyèdre au sommet suivant. Ce cheminement est possible sur les plans algorithmique et informatique car l'on s'est faire correspondre à tout sommet une base.

On considère le problème de programmation linéaire $(\mathcal{P})$ mis sous la forme :

$$\begin{aligned} \max z = f(x) = \quad & c^T x \\ s.c. \quad Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Définition 1.9. *On appelle base associée à $(\mathcal{P})$ toute sous matrice B de A carrée d'ordre p et inversible.*

On notera par N l'ensemble complémentaire (variables hors base).

B	variables de base
N	variables hors base

Si on isole ces p variables et si on retient les p égalités correspondant aux p contraintes, on a un système comprenant p inconnus et p équations. Si le système n'est pas dégénéré, il admet une solution unique.

Souvenez vous, vous avez certainement résolu au lycée des systèmes de deux(2) équations à deux(2) inconnus et sans doute de trois(3) équations à trois(3) inconnus en utilisant une méthode d'élimination progressive des variables (**méthode de gauss**). Peut-être avez vous apris à cette époque la notion

[2]la mise en forme standard est faite automatiquement par le solveur qui ajoute les variables d'écart nécessaires.

de **pivot** dans ce processus d'élimination.

Lorsque qu'on choisit p variables (au hasard, pourquoi pas), on définit donc implicitement un système de p équation à p inconnues. On peut résoudre ce système à condition de choisir arbitrairement la valeur de $(n+p)$ - $p = n$ variables.

Si on fixe à zéro (0) les n variables hors base, on obtient une solution qui correspond à un sommet (une intersection de p hyperplans).

Supposons réordonnée la matrice de A du programme linéaire de façon à ce que les p variables de base soient au début (idem pour x), et introduisont les notations suivantes: $A = [B, N]$ et $x = [x_B, x_N]$.

L'équation matricielle $Ax = b$ devient $Bx_B + Nx_N = b$.

Définition 1.10. *On appelle solution de base associée à la base B, la solution particulière du système $Bx_B + Nx_N = b$, lorsque $x_N = 0$ c'est à dire $x = \begin{pmatrix} B^1 b \\ 0 \end{pmatrix}$. Cette solution de base est dite admissible si $x_B = B^1 b \geq 0$. On dit aussi que B est une base admissible.*

Définition 1.11. *Si l'une au moins des composantes de x_B est nulle, on dit que la solution de base est dégénérée. De même on parlera de solution de base admissible dégénérée.*

Comme une solution de base est obtenue en mettant à zéro(0) les variables hors base, avec ces notations, elle est donc caractérisée par les équations suivantes:

$$\sum_{j=n+1}^{n+p} a_{ij} x_j = b_i \qquad \forall\ i = 1, ..., p \tag{1}$$

✓ Changement de base: supposons que l'on parte d'une base réalisable. Pour les problèmes pour lesquels l'origine $x = 0$ est réalisable, la base correspondante sera constituée par les p variables d'écart x_{n+i}, $\forall i = 1, ..., p$. Pour changer de base, on se contentera d'un déplacement local défini de la façon suivante. On change de base en faisant entrer une variable dans la base et en faisant sortir de la base une autre variable initialement dans la base.

$Bx_B + Nx_N = b$
$x_N = 0$
$x_B = B^{-1}b$

✓ Itération: le processus d'échange entre deux (2) variables revient à se déplacer le long d'une arête du polyèdre. Chaque changement de base correspond à une itération de l'algorithme du simplexe et met en oeuvre une opération de pivotage. ✓ **Exemple** : Considérons le programme linéaire sous forme standard :

$$\begin{aligned}
\max f(x) = \quad & 40000x_1 + 20000x_2 \\
s.c. \qquad & 7x_1 + 3x_2 + x_3 = 200 \\
& 4x_1 + 4x_2 + x_4 = 150 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Une solution de base est donnée à l'origine : $x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 = 200$, $x_4 = 150$.

En considérant la forme matricielle associée au système d'équations, on obtient :
$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut séparer la matrice A en deux sous matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Avec B la matrice de base et N la matrice hors base.

On a ainsi $x_N = (x_1, x_2)$ et $x_B = (x_3, x_4)$. En appliquant la définition de la base, on obtient $x_N = 0$ et $x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$.

1.5.3 Principe de la méthode: un peu de théorie

La méthode du simplexe consiste :

- à se donner une solution de base quelconque (par exemple l'origine des coordonnées, si elle appartient au polyhèdre des solutions) qui correspond à un sommet du polyhèdre;
- et à cheminer le long des arêtes du polyhèdre en se déplaçant d'un sommet à un sommet adjacent, jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'améliorer la valeur de la fonction objectif. Comme le polyhèdre est convexe, on est assuré d'atteindre le maximum (ou le minimum) de la fonction objectif.

Nous reprenons les p équations initiales :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \quad \forall\ i = 1, ..., p$$

et la fonction objectif :

$$z = \sum_{j=1}^{n+p} c_j x_j$$

En notation matricielle, on a:

$$Ax = b \quad \text{et} \quad c^T x = z$$

avec:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+p} \end{bmatrix} \; et \; c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

où $x_1, ..., x_n$ sont les variables initiales et $x_{n+1}, ..., x_{n+p}$ les variables d'écart.

Soit A_i la i^{ieme} colonne de la matirce A, et considérons la solution de base, définie par (1):

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} A_i x_i = b \tag{2}$$

C'est par définition une solution pour laquelle les variables initiales sont nulles et les variables d'écart positives ou nulles. Elle donne une valeur notée z_0 de la fonction objectif:

$$z = z_0 = \sum_{i=n+1}^{n+p} c_i x_i$$

On peut exprimer n'importe quel vecteur A_k $(1 \leq k \leq n)$ en fonction des p vecteurs A_i qui constituent une base de l'espace vectoriel à p dimensions puisqu'ils sont linèairement indépendants. Ainsi, on a:

$$A_k = \sum_{i=n+1}^{n+p} t_{ik} A_i, \qquad \forall k = 1, ..., n \tag{3}$$

où les coefficients t_{ik} sont les éléments de la matrice formée par les p vecteurs de la base.

Soit ϵ_k l'accroissement de z qui correspond à A_k:

$$\epsilon_k = \sum_{i=n+1}^{n+p} t_{ik} c_i \tag{4}$$

On a d'autre part, soit λ un scalaire positif, en multipliant les équations (3) et (4) par λ, on obtient:

$$\lambda A_k = \sum_{i=n+1}^{n+p} \lambda t_{ik} A_i \quad \text{et} \quad \lambda \epsilon_k = \sum_{i=n+1}^{n+p} \lambda t_{ik} c_i \tag{5}$$

En exprimant la solution de base dans (2), on a (on ajoute et retranche λA_k):

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} A_i x_i = b = \sum_{i=n+1}^{n+p} A_i x_i + \lambda A_k - \lambda A_k \tag{6}$$

En utilisant (5) dans (6) et en factorisant par A_i, on obtient:

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} A_i x_i = \sum_{i=n+1}^{n+p} A_i x_i + \lambda A_k - \sum_{i=n+1}^{n+p} \lambda t_{ik} A_i = \lambda A_k + \sum_{i=n+1}^{n+p} (x_i - \lambda t_{ik}) A_i \tag{7}$$

De même pour la fonction objectif, on a:

$$z_0 + \lambda(c_k - \epsilon_k) = \sum_{i=n+1}^{n+p} c_i x_i + \lambda(c_k - \epsilon_k) \tag{8}$$

On obtient finalement, en remplaçant $\lambda\epsilon_k$ par sa valeur:

$$z_0 + \lambda(c_k - \epsilon_k) = \lambda c_k + \sum_{i=n+1}^{n+p} (x_i - \lambda t_{ik}) c_i \tag{9}$$

D'aprés les équations (7) et (9), la solution de base et le coût réduit peuvent tous s'exprimer en fonction de $x_i - \lambda t_{ik}$ $(x_i - \lambda t_{ik} = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{x_i}{t_{ik}})$.

✓ A condition qu'un t_{ik} au moins ne soit pas négatif et que λ ne soit pas nul, si l'on donne à λ la plus petite valeur positive des rapports $\frac{x_i}{t_{ik}}$, i.e.

$$\lambda = \lambda^* = \min_{i=\{n+1,\ldots,n+p\}} \frac{x_i}{t_{ik}}$$

tous les termes $x_i - \lambda^* t_{ik}$ sont positifs, sauf un qui est nul, et pour lequel $i = i^*$.
On peut alors faire sortir de la base le vecteur A_{i^*} et le remplacer par A_k. Il en résulte ainsi une nouvelle solution de base qui est distincte de la précédente.
Reste à choisir A_k: le changement de base va entrainer une variation de la valeur de z_0 égale à $\lambda(c_k - \epsilon_k)$. Pour maximiser cette variation, on détermine:

$$\max_{k=\{1,\ldots,n\}} (c_k - \epsilon_k)$$

et l'on obtient $k = k^*$.

Remarque 1.6. *Les* $\epsilon_k - c_k$ *représentent la variation unitaire de la fonction objectif quand on passe d'une base à l'autre, c'est à dire les coûts marginaux des variables* x_k.

1.5.4 Critères de Dantzig et test d'optimalité

- **Premier critère**: On fait entrer dans la base la variable x_k tel que la quantité $c_k - \epsilon_k$ soit le plus grand possible si l'on maximise la fonction objectif et le plus petit possible si on minimise. On notera k^* l'indice de cette variable.

- **Deuxième critère**: On fait sortir de la base la variable x_i pour lequel $\lambda = \frac{x_i}{t_{ik^*}}$ est aussi petit que possible (mais positif) avec $t_{ik^*} > 0$. on notera i^* l'indice de cette variable.

Remarque 1.7. *1. Ainsi l'application des critères de Dantzig entraîne que dans la nouvelle base la variable* x_{k^*} *est remplacée par la variable* x_{i^*}.

2. *En faisant cette transformation, on transforme la solution initiale en améliorant la valeur de z.*

Test d'optimalité: Cette transformation est à faire jusqu'à ce que tous les coûts marginaux des variables x_k soient négatives ou nulles pour une maximisation et positives ou nuls pour une minimisation.

1.5.5 Application à l'exemple 1

La forme standard de l'exemple 1 est donné par :

$$\begin{aligned} \max f(x) = \; & 40000x_1 + 20000x_2 \\ s.c. \quad & 7x_1 + 3x_2 + x_3 = 200 \\ & 4x_1 + 4x_2 + x_4 = 150 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $n = 4$ (nombre de variables) et $p = 2$ (nombre de contraintes).
Le **premier tableau** (initialisation) du simplexe est donné par le tableau 24.

Pour simplifier les calculs, on factorise la fonction objectif par 10 000; et on résout le programme suivant; et la valeur obtenue à la fin sera multipliée par les 10 000.

$$\begin{aligned} \max f(x) = \; & 4x_1 + 2x_2 \\ s.c. \quad & 7x_1 + 3x_2 + x_3 = 200 \\ & 4x_1 + 4x_2 + x_4 = 150 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

La solution de base initiale est donnée à l'origine : $x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 = 200$, $x_4 = 150$. La valeur de la fonction objectif est 0.

En appliquant le premier critère de Dantzig, on obtient: le côut le plus élevé est 4 qui correspond à x_1, donc c'est x_1 qui va entrer dans la base (k^*=1).
Le deuxième critère de Dantzig donne: $\min(\frac{200}{7}, \frac{150}{4}) = \frac{200}{7}$, qui correspond à x_3 qui va sortir de la base ($i^* = 3$).
Tous les coûts marginaux ne sont pas négatifs ou nuls, donc on continue la procédure (le test d'arrêt n'est pas atteint).

	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_3	7	3	1	0	200	L_1
x_4	4	4	0	1	150	L_2
z	4	2	0	0	**0**	L_3

Table 1: premier tableau du simplexe

L'élément de la matrice encerclé dans le tableau correspond au pivot (pour $i^* = 3$ et $k^* = 1$). C'est l'élément a_{31} de la matrice A. Ce sont les formules de Gauss-Jordan[19] que nous allons appliquer aux éléments de A, b et z.

$b_3^{(1)} = \frac{b_3}{a_{31}}$
$a_{3j}^{(1)} = \frac{a_{3j}}{a_{31}} \quad (\forall j)$
$b_i^{(1)} = b_i - a_{i1} b_3^{(1)} \quad (\forall i \neq 3)$
$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} a_{3j}^{(1)} \quad (\forall j, \forall i \neq 3)$
$z_j^{(1)} = z_j - z_1 a_{3j}^{(1)} \quad (\forall j)$ valeur des coûts réduits
$\bar{z}^{(1)} = \bar{z} + z_1 b_3^{(1)}$ valeur de la fonction objectif

Table 2: Formule de calcul de la nouvelle base, des nouveaux coûts réduits, de la valeur de la fonction objectif

Le **deuxième tableau** du simplexe est donné par le tableau 25:

	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_1	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{200}{7}$	$L_1' = \frac{L_1}{7}$
x_4	0	$\frac{16}{7}$	$-\frac{4}{7}$	1	$\frac{250}{7}$	$L_2' = L_2 - 4L_1'$
z	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$	0	$-\frac{800}{7}$	$L_3' = L_3 - 4L_1'$

Table 3: deuxième tableau du simplexe

On applique le premier critère de Dantzig, dans le deuxième tableau, on obtient: le côut le plus élevé est $\frac{2}{7}$ qui correspond à x_2, donc c'est x_2 qui va entrer dans la base (k^*=2).
Le deuxième critère de Dantzig donne: $\min(\frac{\frac{200}{7}}{\frac{3}{7}}, \frac{\frac{250}{7}}{\frac{16}{7}}) = \min(\frac{200}{3}, \frac{250}{16}) = \frac{250}{16}$, qui correspond à x_4 qui va sortir de la base ($i^* = 4$).
Tous les coûts marginaux ne sont pas négatifs ou nuls, donc on continue toujours la procédure, et

on passe au tableau suivant.

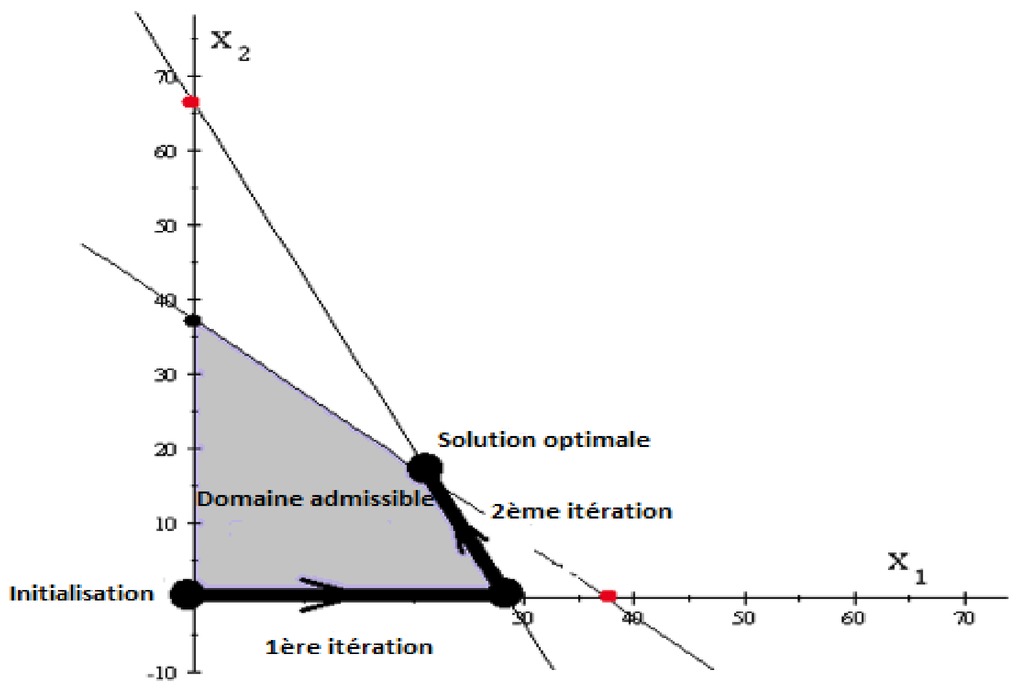
Le **troisième tableau** du simplexe est donné par le tableau 26:

	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{175}{8}$	$L_1^{''}=L_1^{'}-\frac{3}{7}L_2^{''}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{125}{8}$	$L_2^{''}=\frac{7}{16}L_2^{'}$
z	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{475}{4}$	$L_3^{''}=L_3^{'}-\frac{2}{7}L_2^{''}$

Table 4: troixième tableau du simplexe

Tous les coûts marginaux sont négatifs ou nuls, donc l'algorithme s'arrête. L'optimum est atteint au point $x_1^* = \frac{175}{8}$ et $x_2^* = \frac{125}{8}$, avec une valeur optimale de $\frac{475}{4} = 118.75$.
Ensuite, on multiplie par les 10 000 qu'on avait factorisé. Ca devient 1 187 500.

Le cheminement de l'algorithme du simplexe (sommet après sommet) est illustré dans le graphique suivant:



Remarque 1.8. • *Attention: Le nombre d'itérations n'est pas forcément égale au nombre de variables initiales ni au nombre de variables d'écart. En pratique, on observe que le nombre d'itérations requises est de l'ordre de $\frac{3}{2}m$ où m est le nombre de contraintes (ne dépend donc pas du nombre de variables).*

- *On constate que dans les tableaux la case dédiée à la fonction objectif indique une valeur opposée à celle de la fonction objectif correspondant à la solution de base du tableau. Pour* *faire en sorte que cette case indique exactement la bonne valeur il faut faire les calculs avec la formule "valeur de la fonction objectif" dans le tableau 2. Par exemple dans le tableau 25 de l'exemple précédent pour avoir la valeur de la fonction objectif qui est de $\frac{800}{7}$, on calcule avec la formule $L_3'=L_3+4L_1'$.*

Dans la suite nous calculerons la valeur de la fonction objectif avec la bonne formule et mettrons la bonne valeur directement dans la case.

✓ Pour l'exemple 2, son tableau du simplexe est donné par le tableau 5. Les calculs sont laissés aux étudiants sous forme d'exercice.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	1	1	1	0	0	10000	L_1
x_4	2	6	0	1	0	48000	L_2
x_5	3	1	0	0	1	24000	L_3
z	400	800	0	0	0	**0**	L_4
x_3	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	2000	$L_1'=L_1-L_2'$
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	8000	$L_2'=\frac{1}{6}L_2$
x_5	$\frac{8}{3}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	1	16000	$L_3'=L_3-L_2'$
z	$\frac{400}{3}$	0	0	$-\frac{400}{3}$	0	**6 400 000**	$L_4'=L_4-800L_2'$
x_1	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	3000	$L_1''=\frac{3}{2}L_1'$
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	7000	$L_2''=L_2'-\frac{1}{3}L_1''$
x_5	0	0	-4	$\frac{1}{2}$	1	8000	$L_3''=L_3'-\frac{8}{3}L_1''$
z	0	0	-200	-100	0	**6 800 000**	$L_4''=L_4'-\frac{400}{3}L_1''$

Table 5: Tableau du simplexe de l'exemple 2

1.5.6 Cas particuliers et compléments

1. `Problème infaisable`:

   Un programme linèaire n'admet pas de solution si les contraintes sont incompatibes entre elles. Ainsi, le problème:

$$
\begin{aligned}
\max\ z = \ & x_1 + x_2 \\
s.c. \qquad & -8x_1 + x_2 \geq -40 \\
& x_1 + x_2 \geq 8 \\
& -x_1 - 2x_2 \geq -10 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

   est insoluble.

2. Il peut y avoir `indétermination sur le choix des variables à faire entrer dans la base` : il suffit que l'une des quantités des coûts marginaux soient égales. Faute de critère raisonnable, on choisit généralement de façon arbitraire. Toutefois, ceci peut allonger le temps de résolution du programme.

3. Il peut y avoir également `indétermination sur le choix des variables à faire sortir de la base`. On est alors dans le cas de la dégénérescence et c'est une infinité de solutions optimales qu'admet le programme.

4. `Optimum non borné`.

   Le problème suivant n'admet pas un optimum borné.

$$
\begin{aligned}
\max\ z = \ & x_1 + 2x_2 \\
s.c. \qquad & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
& x_1 - 4x_2 \leq 4 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1.5.7 Base de départ et variables artificielles

Lorsque l'origine ($x = 0$) ne correspond pas au programme réalisable, on ajoute automatiquement des **variables artificielles** de façon à ce que l'on puisse toujours constituer aisément une base initiale réalisable à partir de l'origine.

Supposons une contrainte initiale de type inférieure ou égale (i.e. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \; \forall i = 1, ..., p$) et telle que $b_i > 0$. Aprés introduction de la variables d'écart, cette contrainte s'écrit, on l'a vu, sous la forme suivante (programme linéaire sous forme standard):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \quad \forall\ i = 1, ..., p$$

Pour construire une base initiale, on peut dans ce cas choisir la variable x_{n+i} dans la base. En effet, en posant $x_j = 0$ pour tout j (variables hors base) on obtient $x_{n+i} = b_i$ avec $x_{n+i} > 0$.

✓ En revanche, adopter la même procédure pour une contrainte supérieure de type $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i$ conduirait à une base non réalisable ($e_i = -b_i$):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \;\text{ et }\; x_{n+i} \geq 0$$

On introduit dans ce cas la variable artificielle $e_i > 0$, de façon à pouvoir l'inclure dans la base initiale.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} + e_i = b_i \qquad \text{et} \;\; x_{n+i} \geq 0 \;\text{ et }\; e_i \geq 0$$

La base initiale est construite en posant $x_j = 0$, $x_{n+i} = 0$ (variables hors base) et $e_i = b_i$ (e_i dans la base).

Dans une première variante de la méthode du simplexe (**la méthode du grand M)**, on fixe des pénalités (coûts) très élevés aux variables artificielles (M nombre réel positif très grand).

Dans le cadre d'une `maximisation`, on pose:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - Me_i$$

Pour une `minimisation`:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + Me_i$$

Au cours des itérations, l'algorithme du simplexe va progressivement annuler les variables artificielles.

• Si toutes les variables artificielles s'annulent au cours du déroulement de l'algorithme, le programme devient réalisable au regard des contraintes initiales.

• Si à l'optimum, au moins une variable artificielle reste strictement positive, alors le problème initiale n'a pas de solution optimale.

✓ Dans une autre implantation plus classique de la méthode du simplexe, on met en oeuvre **la méthode des deux phases**. Dans une première phase, on prend comme fonction objectif la somme des variables artificielles que l'on minimise cherchant ainsi à les annuler. Si la somme est nulle, on aborde la deuxième phase en supprimant les variables artificielles devenues inutiles puis on change de critère en reprenant la fonction objectif du problème initial.

Remarque 1.9. *Pour diminuer le nombre d'itérations et gagner ainsi du temps de résolution de l'algorithme du simplexe, on a intérêt à construire une base de départ la plus intéressante possible. Cette phase technique s'appelle recherche d'une* **base avancée** *ou* **crashing**.

✓ **Exemple** : Soit le programme suivant:

$$\begin{aligned} \max f(x) = \ & x_2 \\ s.c. \qquad & 3x_1 + 4x_2 \geq 9 \\ & 5x_1 + 2x_2 = 8 \\ & 3x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

L'introduction des variables d'écart et artificielles donne:

$$\begin{aligned} & 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \\ & 3x_1 - x_2 + x_6 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Méthode du grand M. On résout le programme suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 - Mx_4 - Mx_5 \\ s.c. \ \ & 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \\ & 3x_1 - x_2 + x_6 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

   La solution de base initiale est donnée par : $x_1 = x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = 9,\ x_5 = 8,\ x_6 = 0.$ $f(x) = 17M.$

On calcul les coûts réduits en exprimant les variables artificielles en fonction des autres variables:

$$\begin{cases} x_4 = & 9 - 3x_1 - 4x_2 + x_3 \\ x_5 = & 8 - 5x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Ainsi $x_4 + x_5 = 17 - 8x_1 - 6x_2 + x_3$ à remplacer dans la fonction objectif pénalisée. D'où $f(x) = 8Mx_1 + (1 + 6M)x_2 - Mx_3 + 17M$.

On obtient les tableaux du simplexe suivants avec les variables artificielles :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_4	3	4	-1	1	0	0	9	L_1
x_5	5	2	0	0	1	0	8	L_2
x_6	3	-1	0	0	0	1	0	L_3
z	8M	1+6M	-M	0	0	0	**17M**	L_5

Table 6: Initialisation

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_4	0	5	-1	1	0	-1	9	$L_1^{'} = L_1 - 3L_3^{'}$
x_5	0	11/3	0	0	1	-5/3	8	$L_2^{'} = L_2 - 5L_3^{'}$
x_1	1	-1/3	0	0	0	1/3	0	$L_3^{'} = L_3/3$
z	0	1+26M/3	-M	0	0	-8M/3	**17M**	$L_5^{'} = L_5 - 8ML_3^{'}$

Table 7: Itération 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_2	0	1	-1/5	1/5	0	-1/5	9/5	$L_1^{''} = L_1^{'}/5$
x_5	0	0	-14/15	-11/15	1	-14/15	7/5	$L_2^{''} = L_2^{'} - (11/3)L_1^{''}$
x_1	1	0	4/15	1/15	0	4/15	3/5	$L_3^{''} = L_3^{'} + (1/3)L_1^{''}$
z	0	0	(3+11M)/15	(-3-26M)/15	0	(3-14M)/15	**(9-7M)/5**	$L_5^{''} = L_5^{'} - (1 + 26M)/3)L_1^{''}$

Table 8: Itération 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_2	0	1	0	0	3/11	-5/11	24/11	$L_1''' = L_1'' + 0.2L_2'''$
x_3	0	0	1	-1	15/11	-14/11	21/11	$L_2''' = L_2''/(11/15)$
x_1	1	0	0	0	1/11	2/11	8/11	$L_3''' = L_3'' + (1/15)L_2'''$
z	0	0	0	-M	-(11M+3)/11	5/11	**24/11**	$L_5''' = L_5'' - (3+11M)/15)L_2'''$

Table 9: Itération 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_2	2.5	1	0	0	1/2	-5/11	4	$L_1'''' = L_1''' + (5/11)L_3''''$
x_3	7	0	1	-1	2	-14/11	7	$L_2'''' = L_2''' + (14/11)L_3''''$
x_6	11/2	0	0	0	1/2	2/11	4	$L_3'''' = L_3'''/(2/11)$
z	-2.5	0	0	0	-M-0.5	0	**4**	$L_4'''' = L_4''' - (5/11)L_3''''$

Table 10: Itération 4

2. Méthode à deux phases. On résout le programme en deux phases :

   - Phase 1: On résout le programme

$$\begin{aligned} \min \quad & A = x_4 + x_5 \\ s.c. \quad & 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \\ & 3x_1 - x_2 + x_6 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_6 \geq 0, \end{aligned}$$

   Dans le tableau du début on introduit la contrainte $z = x_2 \iff -x_2 + z = 0$ pour faciliter le passage de la phase 1 à la phase 2.

   En effet cela permettra d'obtenir directement les coûts réduits de la phase 2.

   La solution de base initiale est donnée par : $x_1 = x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = 9,\ x_5 = 8,\ x_6 = 0.$ $z = 0,\ A = 17.$

   On calcul les coûts réduits en exprimant les variables artificielles en fonction des autres variables:

$$\begin{cases} x_4 = & 9 - 3x_1 - 4x_2 + x_3 \\ x_5 = & 8 - 5x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Ainsi $x_4 + x_5 = 17 - 8x_1 - 6x_2 + x_3$ à remplacer dans la fonction objectif pénalisée. D'où $A = -8x_1 - 6x_2 + x_3 + 17$.

On obtient les tableaux du simplexe suivants avec les variables artificielles :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z		
x_4	3	4	-1	1	0	0	0	9	L_1
x_5	5	2	0	0	1	0	0	8	L_2
x_6	3	-1	0	0	0	1	0	0	L_3
z	0	-1	0	0	0	0	1	**0**	L_4
A	-8	-6	1	0	0	0	0	**17**	L_5

Table 11: Initialisation

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z		
x_4	0	5	-1	1	0	-1	0	9	$L_1' = L_1 - 3L_3'$
x_5	0	11/3	0	0	1	-5/3	0	8	$L_2' = L_2 - 5L_3'$
x_1	1	-1/3	0	0	0	1/3	0	0	$L_3' = L_3/3$
z	0	-1	0	0	0	0	1	**0**	$L_4' = L_4 - 0L_3'$
A	0	-26/3	1	0	0	8/3	0	**17**	$L_5' = L_5 + 8L_3'$

Table 12: Itération 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z		
x_2	0	1	-1/5	1/5	0	-1/5	0	9/5	$L_1'' = L_1'/5$
x_5	0	0	-14/15	-11/15	1	-14/15	0	7/5	$L_2'' = L_2' - (11/3)L_1''$
x_1	1	0	4/15	1/15	0	4/15	0	3/5	$L_3'' = L_3' + (1/3)L_1''$
z	0	0	-1/5	1/5	0	-1/5	1	**9/5**	$L_4'' = L_4' + L_1''$
A	0	0	-11/15	26/15	0	14/15	0	**7/5**	$L_5'' = L_5' + (26/3)L_1''$

Table 13: Itération 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z		
x_2	0	1	0	0	3/11	-5/11	0	24/11	$L_1''' = L_1'' + 0.2L_2'''$
x_3	0	0	1	-1	15/11	-14/11	0	21/11	$L_2''' = L_2''/(11/15)$
x_1	1	0	0	0	1/11	2/11	0	8/11	$L_3''' = L_3'' + (1/15)L_2'''$
z	0	0	0	0	3/11	-5/11	1	**24/11**	$L_4''' = L_4'' + 0.2L_2'''$
A	0	0	0	1	1	0	0	**0**	$L_5''' = L_5'' + (11/15)L_2'''$

Table 14: Itération 3

On constate qu'on a obtenu une valeur optimale nulle (les variables artificielles sont toutes hors base) alors le problème admet une solution réalisable. On peut passer à la phase 2.

- Phase 2: Lorsque les variables artificielles on été annulées dans la phase 1, on résout le programme suivant:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_2 \\ s.c. \quad & x_2 - (5/11)x_6 = 24/11 \\ & x_3 - (14/11)x_6 = 21/11 \\ & x_1 + (2/11)x_6 = 8/11 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_6 \geq 0, \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_6		
x_2	0	1	0	-5/11	24/11	L_1
x_3	0	0	1	-14/11	21/11	L_2
x_1	1	0	0	2/11	8/11	L_3
z	0	0	0	5/11	**24/11**	L_4

Table 15: Itération 3

1.6 Dualité

La méthode du simplexe permet d'obtenir une solution optimale à tout programme linéaire en variables continues (non entières). La théorie de la dualité donne d'autres informations caractérisant une solution optimale.

	x_1	x_2	x_3	x_6		
x_2	5/2	1	0	0	4	$L_1^{'} = L_1 + (5/11)L_3^{'}$
x_3	7	0	1	0	7	$L_2^{'} = L_2 + (14/11)L_3^{'}$
x_6	11/2	0	0	1	4	$L_3^{'} = L_3/(2/11)$
z	-5/2	0	0	0	4	$L_4^{'} = L_4 + (5/11)L_3^{'}$

Table 16: Itération 4

1.6.1 Variable duale associée à une contrainte

Nous considérons une solution optimale d'un programme linéaire et une de ses contraintes se présentant sous la forme d'une inégalité. Dans ce cas deux (2) situations peuvent se présenter:

- cette contrainte n'est pas saturée (la variable d'écart correspondante est différente de zéro (0)): donc toute modification locale du second membre ne modifiera ni la solution optimale trouvée, ni bien sûr la valeur de la fonction objectif optimale.

- cette contrainte est saturée: lorsque le problème n'est pas dégénéré et si on la resserre davantage, la solution optimale va se déplacer et la fonction objectif va se dégrader. Inversement, si l'on relâche cette contrainte, la fonction objectif va s'améliorer.

Définition 1.12. *On appelle* **valeur duale** *associée à une contrainte, la quantité dont varie la fonction objectif lorsqu'on fait varier d'une unité la valeur du second membre.*

Remarque 1.10. *Si la fonction objectif est monétaire, la valeur duale représente un coût de la ressource correspondante. Mais ce coût n'est pas une donnée, c'est un résultat de l'optimisation qui tient compte de l'ensemble des contraintes saturées.*

Ces valeurs sont donc très utiles dans l'analyse d'une solution optimale. Elles permettent de connaitre les contraintes les plus contraignantes, celles dont une modification permettrait le plus grand gain marginal.

1.6.2 Dual d'un programme linéaire

A tout programme linéaire, on peut associer un autre programme linéaire appelé programme dual. Considérons un programme linéaire sous forme canonique, ce programme sera appelé **programme**

primal.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \forall i = 1, ..., p \\ & x_j \geq 0, \qquad \forall j = 1, ..., n \end{aligned} \tag{10}$$

Le programme linéaire dual est construit en associant à toute contrainte i du primal, une variable duale y_i et à toute variable j du primal, une contrainte. Les coûts associés aux variables du dual sont les seconds membres du primal et les seconds membres du dual sont les coûts du primal.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{p} b_i y_i \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{i=1}^{n} y_i a_{ij} \geq c_j \qquad \forall j = 1, ..., n \\ & y_i \geq 0, \qquad \forall i = 1, ..., p \end{aligned} \tag{11}$$

Ou encore sous forme matricielle:

Primal:

$$\begin{aligned} \max \ & c^T x \\ s.c. \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned} \min \ & b^T y \\ s.c. \ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Remarque 1.11. *Le dual du dual donne le primal.*

La démonstration (facile) est laissée aux étudiants sous forme d'exercice.

✓ Interprétation du dual

Un acheteur souhaite acheter les ressources i, $i \in \{1, ..., p\}$ à une entreprise (celle considérée dans l'interprétation économique du problème primal de la section 1.3). L'acheteur cherche donc le prix y_i (non négatifs) d'une unité de ressource i qu'il est prêt à payer pour que:

- son prix total d'achat $\sum_{i=1}^{p} b_i y_i$ soit minimal
- l'entreprise accepte de vendre si: $\sum_{i=1}^{p} y_i a_{ij} \geq c_j$.

1.6.3 Théorème de la dualité

Ce théorème met en relation les solutions de ces deux (2) programmes linéaires (primal et dual): de la solution de l'un on déduit celle de l'autre.

Théorème 1.1. *Si les programmes primale et dual possèdent l'un et l'autre des solutions admissibles, alors le primal admet une solution optimale $\{x_j^*, x_{n+i}^*\}$, le dual une solution optimale $\{y_i^*, y_{p+j}^*\}$ telles que:*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{p} b_i y_i^*$$

$$y_i^* x_{n+i}^* = 0$$

$$x_j^* y_{p+j}^* = 0$$

Remarque 1.12. *Grâce à la théorie de dualité, la méthode du simplexe donne toutes les valeurs duales d'un programme linéaire lorsqu'on a une solution de base optimale.*

1.6.4 Application à l'exemple 1

Nous rappelons le problème (primal) qui s'écrit:

$$\begin{aligned} \max f(x) = \;& 40000x_1 + 20000x_2 \\ s.c. \quad & 7x_1 + 3x_2 \leq 200 \\ & 4x_1 + 4x_2 \leq 150 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Le problème dual est donné par:

$$\begin{aligned} \min \; g(x) = \;& 200y_1 + 150y_2 \\ s.c. \quad & 7y_1 + 4y_2 \geq 40000 \\ & 3y_1 + 4y_2 \geq 20000 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

✓La méthode du simplexe donne à l'optimum la solution du programme dual. Il s'agit là d'un résultat d'une portée pratique considérable qui donne un avantage certain à la méthode du simplexe sur toute autre méthode intérieur.

Ainsi:

- il n'est pas nécessaire de résoudre le programme dual pour connaitre les valeurs duales associées.
- si le programme dual est plus facile à résoudre que le primal, il est plus intéressant de le résoudre et on obtiendra à l'optimum la valeur du programme primal recherché en prenant les valeurs duales du problème dual résolu (en effet, on a vu que le dual du dual est le primal).

Nous reprenons le dernier tableau du simplexe de l'exemple 1 (tableau 17). La solution optimale

	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{175}{8}$	$L_1''=L_1'-\frac{3}{7}L_2''$
x_2	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{125}{8}$	$L_2''=\frac{7}{16}L_2'$
z	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{475}{4}$	$L_3''=L_3'-\frac{2}{7}L_2''$

Table 17: troixième et dernier tableau du simplexe

du dual se trouve dans la ligne des coûts réduits (z); et les valeurs sont prises en valeurs absolues. Il faut compter à partir des variables d'écart (donc variable x_3). On obtient:

$$y_3 = \frac{1}{2},\ y_4 = \frac{1}{8}$$

✓Vérification du théorème de la dualité:

$g(y) = (200 * \frac{1}{2}) + (150 * \frac{1}{8}) = 100 + 75/4 = 475/4 = 118.75$. Reste uniquement à multiplier par les 10 000 qu'on avait factorisé dans la résolution du primal. On retrouve la valeur optimale de 1 187 500.

1.7 Analyse de sensibilité

Nous abordons ici l'analyse de sensibilité[3] de la résolution d'un problème de programmation linéaire. Dans un premier temps nous étudions les conséquences d'une variation d'un coefficient de la fonction objectif, puis celles du second membre d'une contrainte (ressources) donnée. Tout problème de programmation linéaire donne lieu à ce type d'analyse et les résultats que nous allons obtenir ici sont généraux.

En général, cette étude de sensibilité intervient lorsque :

[3]pour une étude graphique, le cas général sera étudié en Travaux Pratiques

- on veut évaluer les conséquences d'un changement de politique modifiant certaines données du problème,

- les données du problème ne sont pas exactement connues, où il faut déterminer dans quelle circonstance cela affecte la solution proposée.

Nous changeons un peu d'exemple et reprenons l'exemple 3 de la section 1.1, où le GIE peut fabriquer un même bien selon deux techniques différentes de production utilisant les services d'une même machine et de la main d'oeuvre. Le formulation était donnée par:

$$\begin{aligned} \max \; f(x) &= 1900x_1 + 2600x_2 \\ s.c. \qquad & 0.5x_1 + 1.5x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 1.5x_2 \leq 15 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Le point A solution du problème a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 22/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7.33 \end{pmatrix}$. La valeur optimale est de $f(A) = 1900 * 2 + 2600 * 22/3 = 22866.67$.

1.7.1 Variation d'un coefficient de la fonction objectif

La modélisation et la résolution du modèle a été faite en supposant que la marge unitaire, selon que le bien est fabriqué à l'aide de la première technique, était de 1900 FCFA. Faut-il produire davantage de bien avec cette première technique quitte à dévaforiser la production via la deuxième technique ? La marge p_1 selon que le bien est fabriqué à l'aide de la première devient un paramètre du problème qui s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \max \; f(x) &= p_1x_1 + 2600x_2 \\ s.c. \qquad & 0.5x_1 + 1.5x_2 \leq 12 \qquad (1) \\ & 2x_1 + 1.5x_2 \leq 15 \qquad (2) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Analysons graphiquement les conséquences de la variation de la marge selon que le bien est produit avec la première technique.

La droite représentative de la marge sur coût variable avait pour équation $1900x_1+2600x_2 =$ constante. La variation de la marge pour la production de bien avec la première technique implique que le coefficient de x_1 dans cette équation varie et donc que la pente de la droite représentative de la marge varie.

Tant que la pente de cette droite reste comprise entre celle des droites (1) et (2)[4], le raisonnement fait lors de la résolution graphique conduit à la conclusion que la solution associée au point A est toujours optimale.

L'intervalle de variation de p_1 est donné par :

$$1/3 \leq p_1/2600 \leq 4/3$$

Soit à:

$$2600/3 \leq p_1 \leq 10400/3 \quad \text{ou encore} \quad 866.67 \leq p_1 \leq 3466.67$$

On a donc mis en évidence un intervalle de variation du coefficient de x_1 dans la fonction objectif sur lequel la solution optimale n'est pas changée.

Ceci nous conduit à la conclusion suivante: tant que la marge selon que le bien est fabriqué à l'aide de la première technique reste entre 2600/3 et 10400/3, il faut continuer à produire 2 unités de biens avec la première technique et 22/3 à partir de la deuxième technique. Pour ces mêmes valeurs de p_1, la valeur maximale du profit total sera égale à :

$$2p_1 + 2600 * (\frac{22}{3}) = 2p_1 + \frac{57200}{3} = 2p_1 + 19066,67.$$

1.7.2 Variation d'un coefficient du second membre

Actuellement, la capacité d'usinage de la machine est de 12 heures. Mais l'incertitude sur le nombre total d'heures disponible susceptible d'être ajouté est grande. On voudrait savoir quel serait l'impact sur la production du même bien si cette quantitée est modifiée. L'analyse graphique peut nous apporter une réponse. La contrainte portant sur la machine est représentée par la droite d'équation $0.5x_1 + 1.5x_2 = 12$ passe à $0.5x_1 + 1.5x_2 = 12 + \alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$). Graphiquement cela signifie que la contrainte (1) se déplace parallèlement à elle-même, vers le haut si α est positif, vers le bas si α est négatif.

On constate alors que le point A intersection des droites (1) et (2) en lequel se trouve actuellement la solution optimale se déplace sur la droite (2). Comme les pentes des droites (1) et (2) ne sont pas changées, la solution optimale reste à l'intersection des contraintes (1) et (2), à condition cependant que ce point reste dans le domaine des solutions réalisables.

Dans ces conditions, pour avoir la solution optimale, il suffit de déterminer les coordonnées du point

[4]l'optimum est donné par l'intersection des ces deux hyperplans

d'intersection des droites (1) et (2). On obtient :

$$\begin{cases} 0.5x_1 + 1.5x_2 = 12 + \alpha & (1) \\ 2x_1 + 1.5x_2 = 15 & (2) \end{cases}$$

L'opération (1)-(2) donne: $0.5x_1 - 2x_1 = 12 + \alpha - 15 \Longrightarrow -\frac{3}{2}x_1 = -3 + \alpha \Longrightarrow x_1 = 2 - \frac{2}{3}\alpha$.

En remplaçant dans (2) on a: $\frac{3}{2}x_2 = 15 - 2x_1 = 15 - 2(2 - \frac{2}{3}\alpha) = 11 + \frac{4}{3}\alpha \;\Longrightarrow x_2 = \frac{22}{3} + \frac{8}{9}\alpha$.

Ces valeurs correspondent à la solution optimale, à condition que cette solution soit réalisable.

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2 - \frac{2}{3}\alpha \geq 0 \\ \frac{22}{3} + \frac{8}{9}\alpha \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha \leq 3 \\ \alpha \geq -\frac{33}{4} \end{cases}$$

Soit $-\frac{33}{4} \leq \alpha \leq 3$.

Tant que α reste compris entre $-33/4$ et 3, la solution optimale reste à l'intersection des contraintes (1) et (2) : c'est à dire que les nombres d'heures de machine et de main d'oeuvre continuent toujours d'être utilisés entièrement. Les quantités à fabriquer dépendent cependant de α, c'est à dire du nombre d'heures de machine disponibles.

Pour α d'heures supplémentaires, la production selon que le bien est produit par le premier technique diminue de $\frac{2}{3}\alpha$ alors que selon qu'il est fabriqué par la deuxième technique augmente de $\frac{8}{9}\alpha$.

La variation du profit sera alors égale à $1900 * (\frac{2}{3}\alpha) + 2600 * (\frac{8}{9}\alpha) = \frac{32200}{3}\alpha$.

Chaque heure d'usinage (de la machine) supplémentaire pourrait faire augmenter la marge sur coût variable de 32200/3, ou au contraire, toute diminution de la capacité d'usinage de la machine la fera diminuer de 32200/3 par heure en moins, et ceci sur un intervalle allant de $-33/4$ heures à $+3$ heures.

De cette information on doit pouvoir tirer les conséquences sur l'intérêt que l'on pourrait avoir à trouver un autre fournisseur susceptible de fournir lui-aussi cette heure machine à un prix qui, le cas échéant, pourrait être supérieure à la marge actuelle, compte-tenu de ce que cela peut rapporter.

2 PROGRAMMATION LINÉAIRE EN NOMBRES ENTIERS

Nous abordons dans ce chapitre une nouvelle catégorie de problèmes : les problèmes de programmation linéaire en nombres entiers. Lorsqu'il n'y a que deux (2) variables de décision, ce problème en variables entières peut être aussi résolu de manière graphique, mais le représentation diffère de celle du chapitre précédent. Lorsqu'il y a un plus grand nombre de variables (supérieur ou égal à trois (3)), nous choisissons l'algorithme global de plan coupant, les coupes de Gomory, que nous verrons dans la section 2.2. Nous présenterons, dans les sections qui suivent, quelques-uns des très nombreux problèmes susceptibles d'être modélisés par un problème de programmation linéaire en **nombres entiers**, c'est à dire des problèmes d'optimisation dans lesquelles variables sont astreintes à ne prendre que des valeurs entières (ou certaines valeurs entières).
Il s'agit là d'un des problèmes les plus riches et les plus actifs de la programmation mathématique.

2.1 Formulation

Définition 2.1. *Un problème de Programmation Linéaire en Nombres Entiers (PLNE) est un problème de Programmation Linéaire (PL) avec toutes ou une partie des variables qui doivent être* **entières***, voire restreintes à* **0 et 1** *comme valeur.*

On dit que les variables sont soumises à des **contraintes d'intégrité**.
Dans certains problèmes, les variables de décision sont, par nature, **entières**, mais nous allons voir que, dans de nombreux cas la modélisation nécessite l'introduction de **variables booléennes**, c'est-à-dire qui ne peuvent prendre que la valeur 0 ou 1.

La forme matricielle d'un programme **linéaire en nombres entiers** pures noté $(\mathcal{P}_{plne})$ s'écrit en trois (3) lignes:

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.c.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0,\ x_j \text{ entier } (\forall j = 1, ..., n) \end{array}$$

On remarque que $(\mathcal{P}_{plne})$ est du même type que le problème du chapitre 1.2 et que dans ce cas $x \in \mathbb{Z}_+^n$ (c'est à dire $x_j \in \mathbb{Z}_+ \ \forall j = 1, ..., n$).

Définition 2.2. *Par opposition, le problème obtenu à partir de $(\mathcal{P}_{plne})$ en relaxant (en "oubliant") les contraintes d'intégrité sera appelé la* **relaxation continue** *de $(\mathcal{P}_{plne})$.*

✓ Il pourra se faire, dans certains cas, que toutes les variables ne soient pas astreintes à être entières, mais seulement certaines d'entres elles. Dans ce cas on parle de **programmation linéaire mixte**[5].

Lorsque toutes les variables sont 0 ou 1, on parle de **programmation linéaire binaire**.

Soit $(\mathcal{P})$ le programme linéaire en nombres entiers suivant:

$$\begin{aligned} \max f(x) = \ & 10x_1 + 11x_2 \\ s.c. \qquad & 10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\ & x_1, x_2 \text{ entiers} \geq 0 \end{aligned}$$

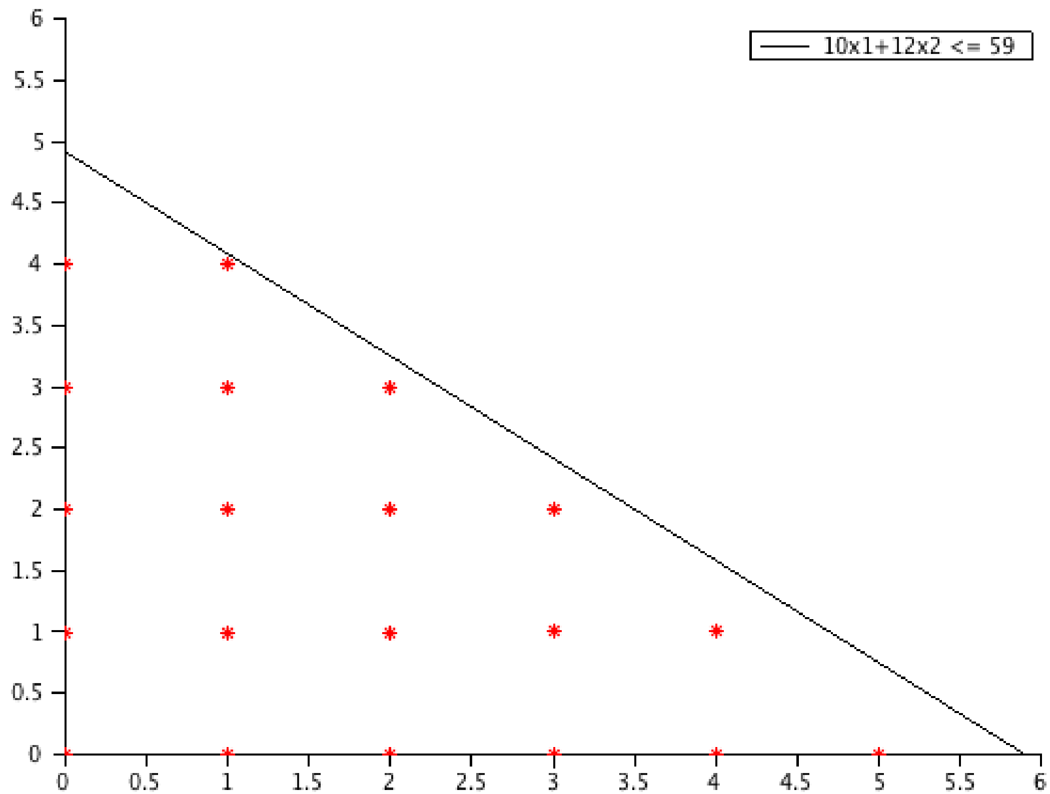


Figure 1: Résolution graphique

La solution continue est donnée par: $x_1 = 5.9$ et $x_2 = 0$.

Cette solution n'étant pas entière, on va appliquer une méthode pour obtenir une solution entière.

[5]Pour cette classe de problèmes, la méthode de partitionnement de **Benders** (1962) [3] permet de ramener de tels problèmes à la résolution d'une séquence de programmes linéaires en nombres entiers purs (c'est à dire dans lesquels *toutes les variables* sont astreintes à prendre des valeurs entières).

Tout d'abord on résout graphiquement la relaxation continue du programme.
Soit $(D) : 10x_1 + 12x_2 = 59$. On trace la droite puis on délimite le domaine réalisable pour obtenir la solution optimale atteinte au point $(5.9, 0)$ de valeur optimale 59. A présent pour trouver une solution entière on teste parmi les points de coordonnées entières dans le domaine réalisable. Et pour limiter les points à tester on trace la droite de la fonction objectif soit $\Delta : 10x_1 + 11x_2 = 59$. Les points de coordonnées entières les plus proches de la droite Δ sont les meilleurs candidats. Ainsi on voit sur le graphique que les points $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ et $(4, 1)$ sont les proches de Δ. Pour les départager on va calculer la valeur de la fonction objectif en ces points. On a: $f(1, 4) = 54$, $f(2, 3) = 53$, $f(3, 2) = 52$ et $f(4, 1) = 51$. Ainsi on conclut que la solution optimale de $(\mathcal{P})$ est $x_1^* = 1$ et $x_2^* = 4$ (entière) avec $f(x^*) = 54$.

2.2 Coupes de gomory

On suppose avoir à résoudre un programme linéaire en variables entières qu'on peut définir comme suit :

$$(P) : \min f(x)$$
$$s.c.$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0 \quad (entier).$$

Il s'agira dans un premier temps de résoudre la relaxation continue (P_{rel}) de ce programme (P). Si la solution est entière alors on a aussi une solution optimale du PLNE initiale. Dans le cas contraire il faudra trouver une bonne coupe qui permettra de restreindre le domaine de recherche de la solution à un sous domaine ne contenant pas la solution optimale de la relaxation continue.
Soit B la base associée à la solution optimale de (P_{rel}). On sait déjà que lorsqu'on a une base admissible, l'équation matricielle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Bx_B + Nx_N = b \ \Rightarrow \ x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \tag{12}$$

On va noter $\bar{b} = (\bar{b}_i) = B^{-1}b$ et $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_i^j) = B^{-1}N$. Remarquons bien que $\bar{b}$ est un vecteur et $\bar{\alpha}$ est une matrice autrement dit chaque $\bar{\alpha}_i$ est une ligne i de la matrice $B^{-1}N$. On va donc regarder ce qui se passe sur une ligne i. Ainsi le sur la $i$ème ligne on a l'équation matricielle (12) qui s'écrit :

$$x_B^i + \sum_j \bar{\alpha}_i^j x_N^j = \bar{b}_i \tag{13}$$

On va introduire les notations suivantes :

- $E(a)$: la partie entière de a.

- $\{a\}$: la partie décimale c'est à dire $\{a\} = a - E(a) > 0$.

Exemple :

- si $a = 1.6 > 0$ on a $E(a) = 1$ et $\{a\} = a - E(a) = 1.6 - 1 = 0.6$

- si $a = -1.6 < 0$ on a $E(a) = -2$ et $\{a\} = a - E(a) = -1.6 - (-2) = 0.4$

De (13) on tire :

$$x_B^i + \sum_j (E(\bar{\alpha}_i^j) + \{\bar{\alpha}_i^j\}) x_N^j = E(\bar{b}_i) + \{\bar{b}_i\}$$

$$x_B^i + \sum_j E(\bar{\alpha}_i^j) x_N^j + \sum_j \{\bar{\alpha}_i^j\} x_N^j = E(\bar{b}_i) + \{\bar{b}_i\} \tag{14}$$

avec $\{\bar{\alpha}_i^j\} \geq 0$ et $x_N^j \geq 0$.
De (14) on déduit :

$$x_B^i + \sum_j E(\bar{\alpha}_i^j) x_N^j \leq E(\bar{b}_i) + \{\bar{b}_i\}$$

Si x_B^i et x_N^j sont des entiers alors on en déduit :

$$x_B^i + \sum_j E(\bar{\alpha}_i^j) x_N^j \leq E(\bar{b}_i) + \{\bar{b}_i\} \tag{15}$$

On fait la différence (15)-(14), on obtient :

$$-\sum_j \{\bar{\alpha}_i^j\} x_N^j \leq -\{\bar{b}_i\}$$

$$\sum_j \{\bar{\alpha}_i^j\} x_N^j \geq \{\bar{b}_i\} \quad \forall i \tag{16}$$

(16) est appelé “Coupe de Gomory”. Elle sera ajoutée aux contraintes du problème initiale et on résout la relaxation continue de ce nouveau problème obtenu par le simplexe. Si on trouve une solution entière alors la solution optimale du problème initiale est trouvée sinon on répète le processus.

Remarque 2.1. *On peut choisir la meilleure coupe à ajouter en utilisant comme critère le maximum des parties décimaux des variables de bases :* $\{b_{i^*}\} = max_i\{b_i\}$.

✓ **Exemple** Soit $(\mathcal{P})$ le programme linéaire en nombres entiers suivant:

$$\begin{aligned} \max f(x) = \ & 10x_1 + 11x_2 \\ s.c. \quad & 10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\ & x_1, x_2 \text{ entiers} \geq 0 \end{aligned}$$

Résoudre avec les coupes de Gomory.

✓ **Correction** Il faut tout d'abord résoudre la relaxation continue du programme qui est donnée par :

$$
\begin{aligned}
(P_{rel}) : \max f(x) = \ & 10x_1 + 11x_2 \\
s.c. \qquad & 10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Et la forme standard est donnée par :

$$
\begin{aligned}
\max f(x) = \ & 10x_1 + 11x_2 \\
s.c. \qquad & 10x_1 + 12x_2 + x_3 = 59 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Une solution initiale de base est donnée par $x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 = 59$. Le dernier tableau du simplexe est donné par :

i	A1	A2	A3	
1	1	1.2	0.1	5.9
z	0	-1	-1	**59**

Table 18: Dernier tableau

Ainsi la solution de base est $x_1 = 59$, $x_2 = 0$.

On a : $\bar{\alpha}_1 = (1.2, 0.1)$ et $\bar{b} = 5.9$.

On va déterminer la coupe (*ici une seule puisqu'on a une seule ligne*) :

$$
\begin{aligned}
\{1.2\}x_2 + \{0.1\}x_3 \geq \{5.9\} \\
0.2x_2 + 0.1x_3 \geq 0.9
\end{aligned}
$$

On déduit de la forme standard $x_3 = -10x_1 - 12x_2 + 59$ puis on remplace dans l'équation précédente :

$$
\begin{aligned}
0.2x_2 + 0.1(-10x_1 - 12x_2 + 59) \geq 0.9 \\
x_1 + x_2 \leq 5
\end{aligned}
$$

On ajoute cette dernière équation au programme (P_{rel}) on obtient :

$$
\begin{aligned}
(P_{rel})' : \max f(x) = \; & 10x_1 + 11x_2 \\
s.c. \qquad & 10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\
& x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

On résout le programme et on trouve le dernier tableau du simplexe : La solution optimale est

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	1	1	0.5	-5	4.5
x_1	1	0	-0.5	6	0.5
z	0	0	-0.5	-5	**54.5**

Table 19: Dernier tableau

donnée par : $x_1 = 4.5$, $x_2 = 0.5$ et la valeur optimale est de 54.5. On constate que cette solution optimale n'est pas entière on refait le processus de coupe.
On cherche la variable de base telle que $\max\{\{4.5\}, \{0.5\}\} = 0.5$. Comme les deux lignes du tableau ont la même partie décimale, on peut choisir une des deux. Prenons la ligne 1.

$$
\begin{aligned}
\{0.5\}x_3 + \{-5\}x_4 &\geq \{4.5\} \\
0.5x_3 &\geq 0.5 \\
x_3 &\geq 1
\end{aligned}
$$

En remplaçant $x_3 = -10x_1 - 12x_2 + 59$ dans l'inégalité précédente on obtient :

$$
\begin{aligned}
-10x_1 - 12x_2 + 59 &\geq 1 \\
10x_1 + 12x_2 &\leq 58
\end{aligned}
$$

On trouve la coupe $10x_1 + 12x_2 \leq 58$.

Remarque 2.2. *Si on choisit la seconde ligne du tableau, on trouve la même coupe.*

$$
\begin{aligned}
\{-0.5\}x_3 + \{6\}x_4 &\geq \{0.5\} \\
0.5x_3 &\geq 0.5 \\
x_3 &\geq 1 \\
10x_1 + 12x_2 &\leq 58
\end{aligned}
$$

On l'ajoute dans le programme (P_{rel}) :

$$\begin{aligned}(P_{rel})'' : \max f(x) = \quad & 10x_1 + 11x_2 \\ s.c. \qquad & 10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 10x_1 + 12x_2 \leq 58 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

En résolvant ce nouveau programme on trouve le dernier tableau du simplexe : On trouve la solution

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	0	-1	1
x_1	1	0	0	6	-0.5	1
x_2	0	1	0	-5	0.5	4
z	0	0	0	-5	-0.5	**54**

Table 20: Dernier tableau

optimale $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ et la valeur optimale 54. La solution est entière donc il s'agit aussi d'une solution optimale du programme ($\mathcal{P}$).

Remarque 2.3.

- *Il peut arriver d'effectuer plusieurs itérations de coupe avant de trouver la solution optimale d'un PLNE par les coupes de Gomory. D'où l'implémentation d'algorithme de coupe et de solveurs.*

- *Lorsque les contraintes et variables sont rationnelles (à fortiori entière), les coupes de Gomory convergent vers la solution optimale en temps fini.*

- *Les coupes gardent le domaine convexe, et peuvent être inefficaces dans certaines configurations.*

- *On peut aussi utiliser d'autres techniques pour résoudre le PLNE, comme la méthode de séparation et évaluation progressive (ou Branch-and-Bound en anglais).*

- *Il peut arriver qu'en ajoutant une coupe qu'une ou plusieurs contraintes puissent être éliminées du problème à résoudre. En effet dans l'exemple précédent la coupe trouvée est* $10x_1 + 12x_2 \leq 58$*, or toute solution admissible satisfaisant à la coupe satisfait aussi à la contrainte* $10x_1 + 12x_2 \leq 59$.

Exemple 2.1. *Soit* $(\mathcal{P})$ *le programme linéaire en nombres entiers suivant:*

$$\begin{aligned} \max f(x) = & \quad 3x_1 + x_2 \\ s.c. \qquad & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & -4x_1 + 5x_2 \geq 9 \\ & x_1, x_2 \text{ entiers} \geq 0 \end{aligned}$$

Résoudre avec les coupes de Gomory.

✓ **Correction** On résout la relaxation continue du programme qui est donnée par :

$$\begin{aligned} (P_{rel}) : \max f(x) = & \quad 3x_1 + x_2 \\ s.c. \qquad & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & -4x_1 + 5x_2 \geq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

On donne la forme standard pénalisée :

$$\begin{aligned} \max f(x) = & \quad 3x_1 + x_2 - Mx_5 \\ s.c. \qquad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ & -4x_1 + 5x_2 - x_4 + x_5 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Une solution initiale de base est donnée par $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ et $x_3 = 5,\ x_5 = 9.$ Le dernier tableau du simplexe est donné par :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	5/18	1/9	-1/9	7/18
x_2	0	1	2/9	-1/9	1/9	19/9
z	0	0	-M+2/9	-19/18	-2/9	**59/18**

Table 21: Dernier tableau

Ainsi la solution de base est $x_1 = 7/18$, $x_2 = 19/9$.

On a (*on peut ne pas considérer la variable artificielle*) : $\bar{\alpha}_1 = (-1/9, 5/18, 1/9)$ et $\bar{b}_1 = 7/18$, $\bar{\alpha}_2 = (1/9, 2/9, -1/9)$ et $\bar{b}_2 = 19/9$.

On cherche l'indice qui correspond à $\max\{\{7/18\}, \{19/9\}\} = 1/9$. Ainsi on sort la coupe à la deuxième contrainte :

$$\begin{aligned}
\{2/9\}x_3 + \{-1/9\}x_4 + \{1/9\}x_5 &\geq \{19/9\} \\
2/9x_3 + 8/9x_4 + 1/9x_5 &\geq 19/9 \\
2/9(5 - 2x_1 - 2x_2) + 8/9(-4x_1 + 5x_2 + x_5 - 9) + 1/9x_5 &\geq 1/9 \\
-62 - 36x_1 + 36x_2 + 9x_5 &\geq 1 \\
-4x_1 + 4x_2 + x_5 &\geq 7
\end{aligned}$$

La coupe est donc $-4x_1 + 4x_2 \geq 7$.

Remarque 2.4. *On peut ignorer les variables artificielles dans la détermination de la coupe. En effet précédemment on aurait pu faire :* $\{2/9\}x_3 + \{-1/9\}x_4 \geq \{19/9\}$ *et obtient le même résultat.*

On ajoute cette inéquation au programme (P$_{rel}$) on obtient :

$$\begin{aligned}
(P_{rel})' : \max f(x) = \ & 3x_1 + x_2 \\
s.c. \qquad & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
& -4x_1 + 5x_2 \geq 9 \\
& -4x_1 + 4x_2 \geq 7 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

On donne la forme standard pénalisée :

$$\begin{aligned}
\max f(x) = \ & 3x_1 + x_2 - Mx_5 - Mx_7 \\
s.c. \qquad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\
& -4x_1 + 5x_2 - x_4 + x_5 = 9 \\
& -4x_1 + 4x_2 - x_6 + x_7 = 7 \\
& x_1, x_2, x_3 \cdots, x_7 \geq 0
\end{aligned}$$

Puis on résout le programme et on trouve le dernier tableau du simplexe :
La solution optimale est donnée par : $x_1 = 3/8$, $x_2 = 17/8$ et la valeur optimale est de 13/4. On constate que cette solution optimale n'est pas entière on refait le processus de coupe.
$\max\{\{1/8\}, \{3/8\}, \{17/8\}\} = 3/8$, ce qui indique que la coupe à déterminer est à la deuxième ligne

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	0	1/4	1	-1	-9/8	9/8	1/8
x_1	1	0	1/4	0	0	1/8	-1/8	3/8
x_2	0	1	1/4	0	0	-1/8	1/8	17/8
z	0	0	-1	0	-M	-1/4	-M+1/4	13/4

Table 22: Dernier tableau

du tableau.

$$\{1/4\}x_3 + \{1/8\}x_6 \geq \{3/8\}$$

$$1/4x_3 + 1/8x_6 \geq 3/8$$

$$2x_3 + x_6 \geq 3$$

$$2(5 - 2x_1 - 2x_2) + (-4x_1 + 4x_2 - 7) \geq 3x_1 \qquad\qquad \leq 0$$

On ajoute cette inéquation au programme (P'_{rel}) on obtient :

$$\begin{aligned} (P_{rel})'' : \max f(x) = \ & 3x_1 + x_2 \\ s.c. \qquad & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & -4x_1 + 5x_2 \geq 9 \\ & -4x_1 + 4x_2 \geq 7 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

On donne la forme standard pénalisée :

$$\begin{aligned} \max f(x) = \ & 3x_1 + x_2 - Mx_5 - Mx_7 \\ s.c. \qquad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ & -4x_1 + 5x_2 - x_4 + x_5 = 9 \\ & -4x_1 + 4x_2 - x_6 + x_7 = 7 \\ & x_1 + x_8 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \cdots, x_8 \geq 0 \end{aligned}$$

Puis on résout le programme et on trouve le dernier tableau du simplexe :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_4	0	0	5/2	1	-1	0	0	-9	7/2
x_6	0	0	2	0	0	1	-1	-8	3
x_2	0	1	1/2	0	0	0	0	-1	5/2
x_1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
z	0	0	-1/2	0	-M	0	-M	-2	5/2

Table 23: Dernier tableau

La solution optimale est donnée par : $x_1 = 0$, $x_2 = 5/2$ et la valeur optimale est de 5/2. On constate que cette solution optimale n'est pas entière on refait le processus de coupe.
Comme $\max\{\{7/2\}, \{5/2\}\} = 1/2$, on peut sortir la coupe au choix sur la première ou la troisième ligne du tableau. Prenons la première ligne :

$$\begin{aligned}
\{5/2\}x_3 + \{-9\}x_8 &\geq \{7/2\} \\
0.5x_3 &\geq 0.5 \\
x_3 &\geq 1 \\
5 - 2x_1 - 2x_2 &\geq 1 \\
x_1 + x_2 &\leq 2
\end{aligned}$$

On trouve la coupe à ajouter : $x_1 + x_2 \leq 2$.

Remarque 2.5. *Avec la troisième ligne, on obtient la même coupe :*
$\{1/2\}x_3 + \{-1\}x_8 \geq \{5/2\} \;\Rightarrow x_1 + x_2 \leq 2.$

On ajoute la coupe dans le programme (P''_{rel}) :

$$\begin{aligned}
(P_{rel})''' : \max f(x) = \;& 3x_1 + x_2 \\
s.c. \qquad & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
& -4x_1 + 5x_2 \geq 9 \\
& -4x_1 + 4x_2 \geq 7 \\
& x_1 \leq 0 \\
& x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

En résolvant ce nouveau programme la solution optimale $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ et la valeur optimale 2. La solution est entière donc il s'agit aussi d'une solution optimale du programme $(\mathcal{P})$.

Remarque 2.6. *On peut résumer la méthode de coupe de Gomory sous forme d'algorithme :*

- *Etape 1: Résoudre la relaxation continue du PLNE.*
- *Etape 2 :*
  - *si la solution optimale de la relaxation continue est entière c'est aussi la solution optimale du PLNE. Dans ce cas Fin.*
  - *si la solution n'est plus entière c'est à dire est fractionnaire, alors on cherche des coupes de Gomory.*
- *Etape 3 : Ajout des coupes dans le PLNE et reconsidérer la relaxation continue de ce nouveau PLNE. Puis aller à Etape 1.*

On répète le processus jusqu'à ce que la solution soit entière.

✓ Dans la sous-section suivante, on y présente des exemples qui font référence à des **situations réelles**.

2.3 Problème du sac-à-dos simple

Ce problème est l'exemple le plus simple de problème de programmation linéaire en nombres entiers. Un alpiniste se préparant à partir en expédition est confronté au douloureux problème de savoir ce qu'il doit mettre dans son sac. Chaque objet présente pour lui une utilité plus ou moins importante et le poids total du sac est limité. La modélisation de ce problème est a priori très simple. On connaît pour chaque objet son poids p_i, ainsi que l'utilité c_i que l'on peut en retirer. On connaît aussi le poids maximum P du sac. Les décisions concernent le nombre de chacun des objets à mettre dans le sac. Elles sont représentées par des variables x_i qui valent 1 si l'objet i est choisi et 0 sinon. La seule contrainte porte sur le poids des objets, c'est à dire:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq P$$

L'objectif concerne la maximisation de l'utilité totale (en faisant l'hypothèse que pour chaque type d'objets, l'utilité est proportionnelle au nombre d'objets); on a

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

Entrées:

- un ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ d'objets
- le poids maximum P
- le revenu c_i associé à chaque objet $i = 1, 2, ..., n$
- le poids p_i associé à chaque objet $i = 1, 2, ..., n$

Les quelques autres applications du problème de sac à dos concernent aussi:

- le choix d'investissements
- l'optimisation d'un portfolio d'actions

✓ On a, a priori, un problème très simple de programmation linéaire, donné par le problème d'optimisation suivant: trouver un ensemble S^* d'objets qui maximise le revenu total et dont la somme des poids soit inférieure à P.

$$\begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ s.c. \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq P \\ x_i = 0 \text{ ou } 1 \qquad \forall\ i = 1, ..., n \end{array}$$

Le nombre de sous-ensembles d'objets est $2n$ et donc pour des problèmes de grande taille il est **impossible de trouver la meilleure solution en explorant toutes les possibilités**, même en utilisant une machine parallèle puissante.

Exemple 2.2.

$$\begin{array}{rl} \max & 8x_1 + 16x_2 + 20x_3 + 12x_4 + 6x_5 + 9x_6 + 2x_7 \\ s.c. & 3x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 5x_6 + 2x_7 \leq 17 \\ & x_1, ..., x_7 = 0 \ ou \ 1 \end{array}$$

Pour la résolution, on pourra se référer aux tehchinques d'optimisation tels que Branch and Bound, cutting plane, branch and cut, etc. (voir en Travaux Pratiques).

2.4 Problème du sac-à-dos multidimensionnel

Le problème du sac-à-dos multidimensionnel en variables 0-1 est une généralisation du problème. Il correspond au cas où le nombre de contraintes de capacité est strictement supérieur à 1.

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.c.}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j \leq P_i \qquad \forall\, i = 1, ..., m$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad \forall\, j = 1, ..., n$$

On peut prendre des instances, en considèrant les données dans OR-Library de J.E. Beasley `http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/info.html`.

2.5 Problèmes de tournées de véhicules

Ce problème consiste à déterminer les trajets qui doivent être faits par chaque véhicule, de façon à minimiser les coûts. On doit couvrir un ensemble de clients par un ensemble de tournées, chaque tournée correspond à un véhicule.

Par exemple des voyageurs de commerce doivent visiter leurs clients à travers le Sénégal. Ils souhaitent effectuer, chacun, la tournée la plus courte possible sur les n villes; tournée visitant chaque ville **une et une seule fois** et revenant à leur point de départ.

Le figure 2 est l'exemple de 3 tournées devant quitter et revenir le dépôt.

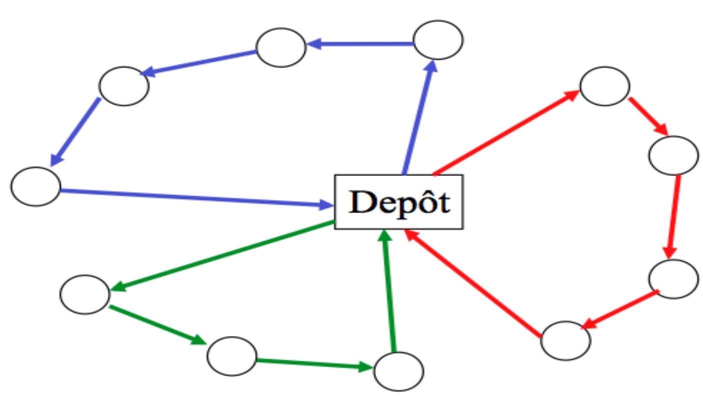


Figure 2: tournées avec 3 véhicules.

Les quelques applications concernent:

- la confection des horaires des chauffeurs d'autobus,

- le transport scolaire,
- le transport de handicapés,
- le transport de marchandises,
- l'affectation des tripulations aux vols dans les transports aériens,
- l'affectation des avions aux vols,
- l'affectation des vols aux portes d'embarquement dans les aéroports,
- etc.

Remarque 2.7. *Le cas le plus simple est le problème sans contraintes.*

✓ S'il existe un seul véhicule (une seule tournée doit être réalisée) il s'agit du problème du voyageur de commerce (TSP: Travelling Salesman Problem).

Il peut être vu comme un cas particulier du problème de localisation-routage dont la somme des demandes n'excède pas la capacité d'un véhicule et où un seul dépôt est disponible.

Le but est de trouver un cycle de longueur totale minimale qui passe exactement une fois par chaque point.

En considérant un graphe $G = (S, A)$ un ensemble de noeuds (ou sommets) S et d'arcs A de coût c_{ij}, le problème peut se formuler ainsi, avec les variables binaires x_{ij} qui valent 1 si l'arc $(i, j) \in A$ est utilisé et 0 sinon.

$$\min \quad \sum_{i\in S}\sum_{j>i} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.c.}$$

$$\sum_{i:(i,j)\in A} x_{ij} = 1 \qquad \forall\, j \in S$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = 1 \qquad \forall\, i \in S$$

$$\sum_{(i,j)\in A: i\in V, j\in S\setminus V} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall\, V \subset S,\ \text{avec } 2 \leq |V| < |S| - 2$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall\, (i, j) \in A$$

2.6 Problème de localisation (location/allocation problem)

Dans ce type bien particulier de problème, l'objectif général est de déterminer l'emplacement optimal d'un certain nombre d'installations sur un ensemble de sites possibles, de manière à :

- minimiser le nombre d'installations pour couvrir toutes les demandes,
- ou maximiser la demande couverte avec un nombre fixé d'installations,
- ou minimiser les coûts, etc.

Les questions à résoudre sont : **Combien d'installations ? Où les placer ? Comment affecter les demandes aux sites ?**

Parmi les nombreuses applications, nous pouvons en citer: localisation de centres d'intervention d'urgence, de centres sociaux, de centres de distribution, de centres de service, de concentrateurs dans les réseaux, etc.
Les raisons: les marchés sont plus étendus, mais souvent avec une clientèle plus dispersée, les livraisons plus faciles grâce à l'ouverture de sites, des frontières, de centrales, de hub, etc.
Par exemple, afin d'approvisionner ces principaux centres de distribution, la SENELEC a décidé d'implanter plusieurs centrales. Pour cela, elle a identifié plusieurs sites susceptibles de convenir parmi lesquels il faudra en choisir au maximum un certain nombre.
On connaît le coût d'implantation des centrales en fonction du site. Le coût de raccordement d'un centre à une centrale est également connu. Le problème est de sélectionner les sites à retenir et, pour chaque centre, la centrale qui le desservira de manière à minimiser le coût total.
Pour modéliser ce problème, nous disposons des données sur les sites et les centres: n sites $j = 1, ..., n$ et p centres $i = 1, ..., p$. On note par f_j le coût d'implantation d'une usine sur le site j, c_{ij} le coût de raccordement du centre de distribution i au site j et K le nombre maximum d'usines.

Choix des variables:

Pour chaque site, il s'agit de savoir si on y construit ou non une usine. Cette décision peut être représentée par une variable booléenne qui aura l'interprétation suivante : si elle vaut 1 c'est "oui", si elle vaut 0, c'est "non".

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si le site } j \text{ est retenu} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour le raccordement des centres aux usines, la décision est de même nature. Pour chacun des centres i et pour chaque usine située sur le site j, il s'agit de savoir si le centre est, ou non, raccordé à l'usine. Une variable booléenne x_{ij} permet de représenter cette décision.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le centre } i \text{ est affecté au site } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les contraintes:

Elles concernent d'abord le fait qu'on ne veut pas plus de K usines construites. Cette contrainte se traduit par : au maximum K variables y_j peuvent prendre la valeur 1, c'est à dire:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = K$$

Chaque centre est affecté à une seule usine c'est-à-dire que, pour chaque i, une seule variable x_{ij} vaut 1 :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall\ i = 1, ..., p$$

Un centre ne peut être raccordé qu'à une usine construite. Si x_{ij} vaut 1 alors y_j doit valoir 1, ce qui s'exprime encore par : si y_j vaut 0 alors x_{ij} vaut 0. Cette contrainte peut être traduite par:

$$x_{ij} \leq y_j \qquad \forall\ i = 1, ..., p \quad \forall\ j = 1, ..., n$$

La fonction objectif:

Deux(2) types de coût sont pris en compte. Pour chaque usine, son coût d'implantation sur le site j vaut f_j si elle est construite, donc si y_j est égal à 1, et 0 sinon. Il en est de même pour le coût de raccordement d'un centre i à une usine. Il vaut soit c_{ij} si x_{ij} vaut 1, soit 0 si x_{ij} vaut 0. D'où l'expression de l'objectif à minimiser :

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j y_j$$

Le problème de localisation est donc modélisé par le PLNE suivant :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j y_j \\
\text{s.c.} \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n} y_j = K \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall\ i = 1, ..., p \\
& x_{ij} \leq y_j \qquad \forall\ i = 1, ..., p \quad \forall\ j = 1, ..., n \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall\ i = 1, ..., p \quad \forall\ j = 1, ..., n \\
& y_j \in \{0, 1\} \qquad \forall\ j = 1, ..., n
\end{aligned}$$

2.7 Problèmes de recouvrement (Set Covering Problem - SCP)

Il s'agit de trouver les sites à ouvrir afin de couvrir les clients au moindre coût. Nous définissons:

- une matrice de recouvrement A, avec chaque élément représentant une donnée binaire $a_{ij} = 1$ si le site i peut couvrir le client j,
- un coût d'ouverture du dépôt i comme c_i,
- et des variables de décision booléennes telles que x_i vaille 1 si le site i est ouvert, et 0 sinon;

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si le site } i \text{ est retenu} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par exemple, afin de satisfaire le demande d'intervention on décide d'implanter des casernes de pompiers dans une ville. La ville est découpée en quartiers. Par ailleurs, un certain nombre de localisations possibles pour les casernes ont été identifiées ainsi que le coût d'implantation correspondant. Le problème est de localiser les casernes de manière à ce que chaque quartier soit à moins de 5 minutes au moins d'une caserne. Et ceci au moindre coût ! Pour chaque quartier, on évalue donc s'il est ou non, à moins de 5 minutes de chacun des différents sites.
Ce problème de recouvrement peut aussi bien concerner la localisation de sirènes que d'émetteurs de télévisions ou bien d'autres choses du moment qu'il s'agit de couvrir des zones, d'où son nom.

La représentation de l'objectif est immédiate ; le coût total d'implantation est égal à :

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i$$

Pour les contraintes, il s'agit d'exprimer que chaque client sera bien couvert: parmi les sites qui intéressent le client j, il doit en avoir au moins 1 de retenu ($x_i = 1$).
Le problème peut se formuler de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \\ \text{s.c.} \quad & \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ji} x_i \geq 1 & \qquad \forall\, j = 1, ..., n \\ x_i \in & \{0, 1\} \qquad \forall\, i = 1, ..., m \end{aligned}$$

✓ Les problèmes de PLNE font partie des problèmes pour lesquels on ne dispose pas d'algorithmes dont le temps de calcul croit de manière polynomiale avec la taille du problème.
Lorsque la taille du problème le permet, on peut le résoudre avec des méthodes de résolution basées

sur une exploration intelligente du domaine des solutions. Les techniques les plus utilisées sont : Branch-and-Bound ou Séparation et Evaluation progressive, Cutting plane ou plan coupant, Branch & cut, etc.

Remarque 2.8. *Il arrive aussi que,* **dans certains (rares) cas***, la solution obtenue sans tenir compte des contraintes d'intégrité, par exemple avec l'algorithme du simplexe, soit* **a posteriori entière***; le problème est alors résolu.*

A Exercices corrigés

Exercice A.1. *Une industrie automobile fabrique 3 types de modèles de voitures (v_t) v_1, v_2 et v_3 qui lui rapportent respectivement des profits de 160 000 FCFA, 300 000 FCFA et 500 000 FCFA. Les niveaux maxima de production pour une semaine sont de 100 pour v_1, 150 pour v_2 et 75 pour v_3. Chaque quinzaine de v_t de type j requiert un temps F_j pour la fabrication, un temps A_j pour l'assemblage et un temps E_j pour l'emballage.*

	v_1	v_2	v_3
F_j	3	3.5	5
A_j	4	5	8
E_j	1	1.5	3

Pendant la semaine à venir, l'entreprise aura 150 heures disponibles pour la fabrication, 200 pour l'assemblage et 60 pour l'emballage.
L'entreprise veut donner un plan de production qui maximise son profit net.

✓ **Modélisation du problème***: En premier, nous examinons dans l'ordre la représentation des décisions, des contraintes et du critère à optimiser.*
Les variables de décisions*: les décisions concernent les quantités de modèle de voitures v_i, pour tout $i = 1, 2, 3$. Alors, on pose : x_i = le nombre de modèle de voitures v_i ($i = 1, 2, 3$) à fabriquer.*
Les contraintes*: il s'agit de représenter les différentes contraintes limitant les heures disponibles pour la fabrication, l'assemblage et l'emballage; mais aussi sur les niveaux maxima de production. Comme les temps F_j, A_j et E_j sont donnés par quinzaine (d'un modèle de type v_i), on doit forcément convertir les données. Le plus simple (pour éviter de diviser partout par 15) revient à multiplier les ressources par 15. Les disponibilités F_j, A_j et E_j sont alors de 2250 ($=150 \times 15$), 3000 ($= 200 \times 15$) et 900 ($= 60 \times 15$), respectivement.*
La première contrainte porte sur la fabrication des voitures: chaque modèle de voiture requiert un

temps pour la fabrication et on en dispose 2250 heures. On doit donc imposer : $3x_1 + 3.5x_2 + 5x_3 \leq 2250$.

De même pour la deuxième contrainte, le nombre d'heures pour l'assemblage est limité. Vu le temps requis par chaque type de voitures, cette contrainte se traduit par : $4x_1 + 5x_2 + 8x_2 \leq 3000$. *De même pour la troisième contrainte, avec le même raisonnement pour l'emballage, on obtient :* $x_1 + 1.5x_2 + 3x_2 \leq 900$.

Les autres contraintes concernent les niveaux maxima de production. Elles s'expriment, respectivement, pour la fabrication, l'assemblage et l'emballage : par $x_1 \leq 100$, $x_2 \leq 150$ *et* $x_3 \leq 75$.

L'ensemble des décisions possibles est donc caractérisé par l'ensemble des valeurs de x_1, x_2 *et* x_3 *vérifiant :*

$$3x_1 + 3.5x_2 + 5x_3 \leq 2250$$

$$4x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 3000$$

$$x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 \leq 900$$

$$x_1 \leq 100$$

$$x_2 \leq 150$$

$$x_3 \leq 75$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Le critère *: l'objectif est de donner le plan de production qui maximise le profit net de l'entreprise. Ce qui est représenté par :* $160x_1 + 300x_2 + 500x_3$.

Le problème est donc modélisé par le problème de programmation mathématique suivant :

$$\begin{aligned}
\max f(x) = \quad & 160x_1 + 300x_2 + 500x_3 \\
s.c. \qquad & 3x_1 + 3.5x_2 + 5x_3 \leq 2250 \\
& 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 3000 \\
& x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 \leq 900 \\
& x_1 \leq 100 \\
& x_2 \leq 150 \\
& x_3 \leq 75 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

La forme standard est donné par :

$$\max f(x) = 160x_1 + 300x_2 + 500x_3$$

$$s.c. \quad 3x_1 + 3.5x_2 + 5x_3 + x_4 = 2250$$

$$4x_1 + 5x_2 + 8x_2 + x_5 = 3000$$

$$x_1 + 1.5x_2 + 3x_2 + x_6 = 900$$

$$x_1 + x_7 = 100$$

$$x_2 + x_8 = 150$$

$$x_3 + x_9 = 75$$

$$x_1 \geq 0, ..., x_9 \geq 0$$

Ainsi, on obtient $n = 9$ (nombre de variables) et $p = 6$ (nombre de contraintes). Le **premier tableau** (initialisation) du simplexe est donné par le tableau 24.

i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9		
4	3	3.5	5	1	0	0	0	0	0	2250	L_1
5	4	5	8	0	1	0	0	0	0	3000	L_2
6	1	1.5	3	0	0	1	0	0	0	900	L_3
7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	100	L_4
8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	150	L_5
9	0	0	1	0	0	0	0	0	1	75	L_6
z	160	300	500	0	0	0	0	0	0	**0**	L_7

Table 24: premier tableau du simplexe

En appliquant le premier critère de Dantzig, on obtient: le côut le plus élevé est 500 qui correspond à x_3, donc c'est x_3 qui va entrer dans la base (k^*=3).

Le deuxième critère de Dantzig donne: $\min(\frac{2250}{5}, \frac{3000}{8}, \frac{900}{3}, \frac{75}{1})$=75, qui correspond à x_9 qui va sortir de la base ($i^* = 9$).

Tous les coûts marginaux ne sont pas négatifs ou nuls, donc on continue la procédure (le test d'arrêt n'est pas atteint).

L'élément de la matrice encerclé dans le tableau correspond au pivot (pour $i^* = 9$ et $k^* = 3$). C'est l'élément a_{63} de la matrice A.

Le **deuxième tableau** du simplexe est donné par le tableau 25:

i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9		
4	3	3.5	0	1	0	0	0	0	-5	1875	$L_1^{'}=L_1-5L_6^{'}$
5	4	5	0	0	1	0	0	0	-8	2400	$L_2^{'}=L_2-8L_6^{'}$
6	1	1.5	0	0	0	1	0	0	-3	675	$L_3^{'}=L_3-3L_6^{'}$
7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	100	$L_4^{'}=L_4$
8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	150	$L_5^{'}=L_5$
3	0	0	1	0	0	0	0	0	1	75	$L_6^{'}=L_6$
z	160	300	0	0	0	0	0	0	-500	**-37500**	$L_7^{'}=L_7-500L_6^{'}$

Table 25: deuxième tableau du simplexe

On applique le premier critère de Dantzig, dans le deuxième tableau, on obtient: le côut le plus élevé est 300 qui correspond à x_2, donc c'est x_2 qui va entrer dans la base (k^*=2).

Le deuxième critère de Dantzig donne: min($\frac{1875}{3.5}$, $\frac{2400}{5}$, $\frac{675}{1.5}$, $\frac{150}{1}$)=150, qui correspond à x_8 qui va sortir de la base ($i^* = 8$).

Tous les coûts marginaux ne sont pas négatifs ou nuls, donc on continue toujours la procédure, et on passe au tableau suivant.

Le **troisième tableau** du simplexe est donné par le tableau 26: On applique le premier critère de

i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9		
4	3	0	0	1	0	0	0	-3.5	-5	1350	$L_1^{''}=L_1^{'}-\frac{7}{2}L_5^{''}$
5	4	0	0	0	1	0	0	-5	-8	1650	$L_2^{''}=L_2^{'}-5L_5^{''}$
6	1	0	0	0	0	1	0	-1.5	-3	450	$L_3^{''}=L_3^{'}-\frac{3}{2}L_5^{''}$
7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	100	$L_4^{''}=L_4^{'}$
2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	150	$L_5^{''}=L_5^{'}$
3	0	0	1	0	0	0	0	0	1	75	$L_6^{''}=L_6^{'}$
z	160	0	0	0	0	0	0	-300	-500	**-82500**	$L_7^{''}=L_7^{'}-300L_5^{''}$

Table 26: troixième tableau du simplexe

Dantzig, dans le troisième tableau, on obtient: le côut le plus élevé est 160 qui correspond à x_1, donc c'est x_1 qui va entrer dans la base (k^*=1).

Le deuxième critère de Dantzig donne: min($\frac{1350}{3}$, $\frac{1650}{4}$, $\frac{450}{1}$, $\frac{100}{1}$)=100, qui correspond à x_7 qui va sortir de la base ($i^* = 7$).

Tous les coûts marginaux ne sont pas négatifs ou nuls, donc on continue toujours la procédure.

Le **quatrième tableau** du simplexe est donné par le tableau 27:

i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9		
4	3	0	0	1	0	0	0	-3.5	-5	1050	$L_1''' = L_1'' - 3L_4'''$
5	4	0	0	0	1	0	0	-5	-8	1250	$L_2''' = L_2'' - 4L_4'''$
6	1	0	0	0	0	1	0	-1.5	-3	350	$L_3''' = L_3'' - L_4'''$
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	100	$L_4''' = L_4''$
2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	150	$L_5''' = L_5''$
3	0	0	1	0	0	0	0	0	1	75	$L_6''' = L_6''$
z	0	0	0	0	0	0	-160	-300	-500	**-82500**	$L_7''' = L_7'' - 160L_4'''$

Table 27: quatrième tableau du simplexe

✓Le problème dual est donné par:

$$\begin{aligned}
\min\ g(x) = \ & 2250y_1 + 3000y_2 + 900y_3 + 100y_4 + 150y_5 + 75y_6 \\
s.c. \qquad & 3y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 \geq 160 \\
& 3.5y_1 + 5y_2 + 1.5y_3 + y_5 \geq 300 \\
& 5y_1 + 8y_2 + 3y_3 + y_6 \geq 500 \\
& y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 \geq 0
\end{aligned}$$

La solution optimale du dual se trouve dans la ligne des coûts réduits (z). Il faut compter à partir des variables d'écart (donc colonne A_4). On obtient:

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0$$

$$y_4 = 160,\ y_5 = 300,\ y_6 = 500$$

Les valeurs sont prises en valeurs absolues.

Vérification du théorème de la dualité:

$g(y) = 2250 * 0 + 3000 * 0 + 900 * 0 + 100 * 160 + 150 * 300 + 75 * 500 = 82500$

Exercice A.2. *Une usine fabrique 2 produits P_1 et P_2 en utilisant un certain nombre de ressources : équipement, main d'oeuvre, matières premières. Ces besoins sont indiqués dans le tableau ci-dessous. Par ailleurs, chaque ressource est disponible en quantité limitée (cf. tableau).*

	P_1	P_2	*disponibilité*
équipement	3	9	81
main d'oeuvre	4	5	55
matière première	2	1	20

Les deux produits P_1 et P_2 rapportent à la vente respectivement des bénéfices de 3900 F et 2600 F par unité. Formuler le problème sous forme de programme linéaire permettant à l'usine de maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits.

Pour formuler le problème en programme linéaire, il faut commencer par déterminer les inconnues du problème. On cherche à connaître la quantité des produits P_1 et P_2 à fabriquer.

Les variables:

Soient x_1 et x_2 les quantités respectives de produits P_1 et P_2 à fabriquer.

La fonction objectif:

On cherche à maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits. Ainsi la fonction objectif à maximiser est l'expression mathématique du bénéfice total des deux produits :

$f(x) = 3900x_1 + 2600x_2$.

Les contraintes:

D'une manière générale les contraintes traduisent des conditions à satisfaire par les variables, des relations entre les variables. Ainsi dans cette exemple, les contraintes sont les expressions mathématiques des limitations des ressources de l'usine :

- *contraintes sur l'équipement :* $3x_1 + 9x_2 \leq 81$.
- *contraintes sur la main d'œuvre :* $4x_1 + 5x_2 \leq 55$.
- *contraintes sur les matières premières :* $2x_1 + x_2 \leq 20$.

L'expression du programme linéaire est :

$$\begin{aligned} \max z = f(x) = \quad & 3900x_1 + 2600x_2 \\ s.c. \qquad & 3x_1 + 9x_2 + \leq 81 \\ & 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

B Quelques exercices

Exercice B.1. *Une usine textile travaille avec une équipe constituée de modélistes, de couturières et d'emballeurs qui gagnent un salaire horaire, respectivement* 2300*,* 1900 *et* 800 $FCFA$*. Le quota horaire journalier obligatoire est de* 8 *heures. Les designers, les couturières et les emballeurs gagnent respectivement* 5%*,* 3% *et* 2% *de leur taux horaire par heure supplémentaires. La répartition des heures supplémentaires est telle que les modélistes font* 30 *minutes, les couturières font* 1 *heure et les emballeurs font* 2 *heures. Il est prévu que le total des heures de travail des designers et des couturières soit chacun d'au moins 400 heures. L'équipe doit effectuer au moins 1400 heures de travail.*

1. *Elaborer un modèle de programmation linéaire afin d'optimiser les coûts de l'usine.*
2. *Écrire le programme sous forme matricielle.*
3. *Écrire la forme standard du programme.*
4. *On suppose que l'usine décide d'employer* 60 *designers. En déduire le nouveau programme linéaire.*
5. *Résoudre graphiquement ce nouveau programme linéaire. En déduire la politique de l'usine dans ces conditions.*

Exercice B.2. *Un atelier d'usinage travaille 8 heures par jour et produit une pièce formée de deux composants. Chaque composant est constitué à partir de deux machines* $M1$ *et* $M2$*. La société dispose d'une machine* $M1$ *et 5 machines* $M2$*, et la productivité des machines* $M1$ *et* $M2$*, par unité de composants, pour la fabrication de la pièce est la suivante (en minutes): La société veut*

Consommation	1 Machine $M1$	5 Machines $M2$
Composant $C1$	3	20
Composant $C2$	5	15

Table 28: Productivité des machines

équilibrer la charge de ces machines, de sorte que, par jour le temps nécessaire pour une machine $M2$ *augmenté de* 30 *minutes est au moins égal au temps d'utilisation d'une machine* $M1$.

1. *Formuler un modèle de programmation linéaire qui maximise la production des composants, sachant que le nombre total de composants est au plus le double des composants* $C2$.

2. *Résoudre le programme par la méthode du simplexe. En déduire la politique de l'entreprise pour la fabrication des pièces.*

3. *Donner le dual du programme. En déduire sa solution optimale.*

Exercice B.3. *Un agriculteur possède 45 hectares. Il souhaite concentrer son agriculture sur le blé et le maïs. Chaque hectare de blé rapporte 200000 Fcfa de profit, alors que chaque hectare de maïs lui rapporte 300000 Fcfa. Le nombre de travailleurs ainsi que la quantité d'engrais nécessaires par hectare à la production varient en fonction du type de plantation, comme indiqué dans le tableau ci-dessous :*

	Blé	*Maïs*
Travailleurs	3	2
Tonnes d'engrais	2	4

1. *Formulez un programme linéaire qui permet à l'agriculteur d'optimiser son profit sachant que 100 travailleurs et 120 tonnes d'engrais sont disponibles.*

2. *Ecrire le programme sous forme matricielle.*

3. *Écrire la forme standard du programme.*

Exercice B.4. *Un fabricant de carburant aviation vend deux types de carburant A et B. Le carburant de type A est constitué de 25% d'essence de catégorie 1, de 25% d'essence de catégorie 2 et de 50% d'essence de catégorie 3. Le carburant de type B est composé à 50% d'essence de catégorie 2 et à 50% d'essence de catégorie 3. Les disponibilités pour la production sont 500 litres par heure de catégorie 1 et 200 litres par heure de catégorie 2 et de catégorie 3 chacun. Les coûts sont de 600 $F\ CFA$ par litre pour le catégorie 1, 1200 $F\ CFA$ pour le catégorie 2 et 1000 $F\ CFA$ pour le catégorie 3. Le type A peut être vendu à 1750 $F\ CFA$ le litre et B peut être vendu à 1900 $F\ CFA$ par litre.*
Formuler un modèle de programmation linéaire permettant au fabricant de maximiser son profit. Ecrire sans coefficients décimaux.

Exercice B.5. *Une entreprise est capable de produire deux biens b_1 et b_2. Ces productions font intervenir deux facteurs fixes : la main d'œuvre et des équipements. L'emploi de la main d'œuvre est rigide à la hausse et à la baisse, la quantité disponible étant égale à 2. La capacité de production des équipements est égale à 1 et ils n'interviennent que pour la production du second bien. On veut maximiser la marge sur coût variable, les marges unitaires étant de 15000 FCFA et 10000 FCFA,* *respectivement. La main d'œuvre et les équipements nécessaire pour la production d'une unité des biens sont donnés dans le tableau suivant:*

	main d'oeuvre	*équipements*
b_1	*2*	-
b_2	*1*	*1*

1. *Formuler le problème sous la forme d'un programme linéaire*
2. *Écrire le programme obtenu sous forme matricielle.*
3. *Résoudre graphiquement le programme obtenu.*
4. *En déduire le programme de production optimal.*
5. *Si la capacité de production des équipements passe de 1 à 3, analyser graphiquement si la solution optimale change. Si oui, donner la nouvelle valeur obtenue.*

Exercice B.6. *Une firme fabrique pour des entreprises de quincaillerie des pièces en inox. Ces pièces sont de trois types A, B, C. Elles sont fabriquées par lot de 50 dans un atelier où sont rassemblées deux machines pour la découpe de l'inox, une machine pour l'embouteillage, deux machines pour le polissage et la finition. Chaque machine fonctionne 120 heures par mois. Les caractéristiques de fabrication sont rassemblées dans le tableau:*

	Coût de l'heure	*lot A*	*lot B*	*lot C*
Découpage	*20 F*	*1*	*1,5*	*1,5*
Embouteillage	*30 F*	*0,5*	-	*1*
Polissage et finition	*40 F*	*2*	*1*	*1*
Inox		*50 F*	*85 F*	*68 F*
Prix de vente (H.T.)		*200 F*	*200 F*	*210 F*

Quel est le programme de production optimal (pour un mois) ? (On utilisera la méthode des tableaux).

Exercice B.7. *Un vendeur de farces et attrapes dispose d'un stock de 3 articles différents: 300 sacs de confettis, 180 chapeaux, 240 paquets de serpentins. Il désire, pour écouler cette marchandise, composer deux types de lots L_1 et L_2 comprenant:*

L_1*: 5 sacs de confettis, 1 chapeau et 2 paquets de serpentins.*

L_2*: 3 sacs de confettis, 3 chapeaux et 3 paquets de serpentins.*

Pour chaque lot de type 1 vendu, le bénéfice réalisé est de 6 F contre 12 F pour un lot de type 2. Question: Combien de lots de chaque type doit-on composer pour maximiser le bénéfice total ? (On utilisera la méthode graphique).

Exercice B.8. *Le gouvernement a décidé de réaliser une campagne de lutte contre l'alcoolisme en faisant diffuser des messages par la télévision (T), la radio (R) et la presse (P). Pour être efficace, cette campagne doit toucher au moins 50% des jeunes entre 15 et 25 ans, au moins 75% des adultes entre 25 et 60 ans et au moins 30% des adultes de plus de 60 ans. Dans le tableau suivant sont regroupées les estimations en millions du nombre des personnes des 3 catégories sensibilisées par le passage d'un message selon le moyen de diffusion.*

Catégories	*15-25*	*25-60*	*60 et plus*	*coût*
T	*10*	*25*	*9*	*10000*
R	*5*	*30*	*8*	*7000*
P	*1*	*10*	*11*	*5000*
pop.totale	*9100*	*25000*	*9000*	

1. *Connaissant pour chaque catégorie sa population totale et le coût moyen de diffusion d'un message par chaque média, on demande de déterminer le PL permettant de réaliser une campagne efficace au moindre coût, sachant que le nombre de messages diffusés par la télévision ne doit pas être plus du triple du nombre des messages diffusés par les autres médias.*

2. *La diffusion des messages par la presse n'étant pas jugé rentable, on demande de déterminer et de résoudre graphiquement le PL associé à la nouvelle campagne, les autres données n'ayant pas changé.*

Exercice B.9. *L'entreprise chimique «ChimSN» est spécialisé dans la production d'un agent AP pouvant neutraliser les déchets polluant déversés par les usines dans les cours d'eau. Pour être efficace, le produit doit contenir les quantités minimales suivantes de 6 composantes chimiques: A,B,C,D,E,F.*

Composant	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Quantité en kg	*0.2*	*0.6*	*0.84*	*2.88*	*3.48*	*1.24*

Il existe sur le marché 2 produits X et Y qui contiennent, pour un kg ces composants en quantités variables (exprimées en %).

Produits	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
X	*10*	*0*	*12*	*24*	*18*	*4*
Y	*0*	*20*	*4*	*18*	*30*	*16*

Un kg de X est vendu 16 F et un kg de Y est vendu 28 F. L'entreprise souhaitant fabriquer son agent au moindre coût, on demande de réaliser le travail suivant:

1. *Ecrire le programme linéaire correspondant au problème de l'entreprise. Ce programme est t-il sous la forme canonique ?*
2. *Ecrire le dual. Quelle interprétation peut on donner à ce programme ?*
3. *Résoudre le P.L. du dual par l'algorithme du simplexe. Donner toutes les interprétations à l'optimum.*

Exercice B.10. *Une industrie automobile fabrique 3 modèles de voitures* (v_t) v_1, v_2 *et* v_3 *qui lui rapportent des profits de 160, 300 et 500 francs. Les niveaux maxima de production pour une semaine sont de 100 pour* v_1, *150 pour* v_2 *et 75 pour* v_3. *Chaque quinzaine de* v_t *de type j requiert un temps* F_j *pour la fabrication, un temps* A_j *pour l'assemblage et un temps* E_j *pour l'emballage.*

	v_1	v_2	v_3
F_j	3	3.5	5
A_j	4	5	8
E_j	1	1.5	3

Pendant la semaine à venir, l'entreprise aura 150 heures disponibles pour la fabrication, 60 pour l'emballage et 200 pour l'assemblage. L'entreprise veut donner un plan de production qui maximise le profit de la compagnie.

1. *Formuler un modèle sous la forme d'un programme linéaire qui donne le plan de production de la compagnie (choix des variables, de la fonction objectif et des contraintes).*
2. *Résoudre le programme obtenu par la méthode du simplexe.*
3. *En déduire le plan de production maximisant le profit.*
4. *Déterminer le programme dual ainsi que la solution pour ce problème.*

Exercice B.11. *Une raffinerie doit fournir chaque jour deux qualités A et B d'essence à partir des constituants 1, 2 et 3. on dispose des données suivantes, avec la quantité maximale disponible quotidiennement notée* Q_{max}:

constituant	Q_{max}	coût unitaire
1	3000	3
2	2000	6
3	4000	4

essence	*spécification*	*prix de vente unitaire*
A	$\leq 30\%$ *de 1*	*5.5*
	$\geq 40\%$ *de 2*	
	$\leq 50\%$ *de 3*	
B	$\leq 50\%$ *de 1*	*4.5*
	$\geq 10\%$ *de 2*	

Donner un modèle permettant de déterminer la composition des mélanges et les quantités produire pour maximiser la recette (toute la production pourra être écoulée). Peut-on se ramener à un problème de programmation linèaire ?

Exercice B.12. *Un agriculture veut répandre sur ses terrains un engrais ayant une teneur en azote* (N)*. Malheureusement, les trois engrais dont il dispose contiennent également les éléments* K *et* P*. Il doit absolument limiter à 44 et 66 unités par hectare l'apport de* K *et* P*. Comment doit-il faire son mélange pour que la quantité d'azote réparti à l'hectare soit maximale . Quelle est la quantité d'azote ainsi répandue et quelle est la production* $N : P : K$ *du mélange ? On donne dans le tableau ci-dessous la quantité de* N*,* P*,* K *présente dans chacun des engrais (par unité d'engrais).*

	engrais 1	*engrais 2*	*engrais 3*
N	3	4	6
P	2	3	4
K	5	2	5

1. *Résoudre avec un code de programme linéaire, et en déduire la quantité d'azote ainsi répandue ainsi que la production* $N : P : K$ *du mélange.*

2. *Formuler le problème dual, calculer les variables duales à l'optimum.*

3. *Interpréter le problème dual.*

Exercice B.13. *Une entreprise chimique veut disposer des produits* A *et* B *contenant des éléments* I*,* II*, et* III *en Pourcentages donnés par le tableau ci-dessous. Elle peut créer des mélanges de produits ayant des contenus minimaux prescrits d'éléments* I*,* II *et* III*.*

		A	*B*	*besoin (en kg) en éléments*
élément	*I*	*20*	*40*	*7*
	II	*30*	*50*	*2*
	III	*30*	*10*	*5*
prix(par kg) du produit		*10*	*5*	

1. *Calculer les quantités de produits A et B à mélanger pour satisfaire au prix minimum les besoins en éléments I, II et III donnés dans le tableau.*

2. *Formuler le dual de ce problème, l'interpréter.*

Exercice B.14. *Une entreprise fabrique des produits I, II et III à partir de ressources. Le tableau ci-dessous donne les consommations par unité de produit fabriqué.*

	I	*II*	*III*	*disponibilité des ressources*
heure-machine	*2*	*3*	*1*	*10*
matière première	*1*	*4*	*3*	*15*

Les recettes fournies par unité de produit fabriqué sont respectivement 6, 4 et 5 kFCFA.

1. *Déterminer un plan de production qui maximise la recette.*

2. *Est-il unique ?*

3. *Interpréter les variables duales du problème; peut-on les trouver dans le tableau optimal du simplexe ?*

4. *L'entreprise pourrait disposer d'une heure-machine supplémentaire au prix de 3 kFCFA; a-t-elle intérêt à accepter cette offre ? et si on lui propose plutôt une unité de matière première au prix de 1/2 kFCFA ?*

Exercice B.15. *Montrer que le programme linéaire suivant peut être résolu par l'algorithme du*

Simplexe moyennant l'introduction de variables artificielles.

$$\begin{aligned}\max f(x) = & 350x_1 + 400x_2 \\ s.c. \qquad & x_1 + x_2 \leq 700 \\ & x_1 + x_2 \geq 500 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 2400 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

On écrira le programme sous la forme standard puis sous la forme standard pénalisée.
Résoudre ensuite le programme par la méthode des tableaux puis vérifier graphiquement le résultat.

Exercice B.16. *Une entreprise produit 2 articles A et B à l'aide de 4 méthodes de production (2 par article). Sa production est limitée par des disponibilités en matières premières: $\alpha \leq$ 120 kg et $\beta \leq$ 100 kg par semaine; et par des disponibilités en main d'oeuvre : 15 ouvriers travaillant 40 heures par semaine. Les contraintes de fabrication sont les suivantes (un ouvrier par article):*

	article A		*article B*		*Disponi-*
	Méthode I	*Méthode II*	*Méthode III*	*Méthode IV*	*bilités*
Main d'oeuvre	*1 ouvrier*	*1 ouvrier*	*1 ouvrier*	*1 ouvrier*	*15*
α, en kg	*7*	*8*	*10*	*12*	*120*
β, en kg	*3*	*2*	*4*	*3*	*100*
Revenu unitaire	*6*	*11/2*	*7*	*8*	

Dans le tableau, le revenu unitaire est donné en millier de FCFA, et la main d'oeuvre par semaine. L'entreprise se propose d'embaucher de nouveaux ouvriers ou d'augmenter la durée de travail hebdomadaire.
En supposant les variations d'emploi sans influence sur les revenus unitaires, indiquer, en prenant pour critère celui de maximisation du revenu total de l'entreprise, s'il ya lieu ou non d'augmenter la durée de travail hebdomadaire et, dans l'affirmative, de combien.

Exercice B.17. *La firme ONJOB est spécialisée dans la production de deux types de produits P_1 et P_2 à partir de deux machines M_1 et M_2. Une unité de P_1 nécessite 2 heures de machine M_1 et 1 heure de machine M_2. Pour le produit P_2, une unité requiert 1 heure de machine M_1 et 3 heures de machine M_2. Les revenus par unité des produits P_1 et P_2 sont de 30 € et 20 €, respectivement. Le temps total de fabrication disponible pour chaque machine est de 8 heures. L'entreprise souhaitant fabriquer son agent au moindre coût, on demande de réaliser le travail suivant:*

1. *Formuler un modèle sous la forme d'un programme linéaire qui donne le plan de production de la firme. Justifier le choix des variables, de la fonction objectif et des contraintes.*

2. *Ce programme est t-il sous la forme canonique ?*

3. *Résoudre le programme obtenu par la méthode du simplexe. Donner toutes les interprétations à l'optimum.*

4. *Déterminer le plan de production qui maximise le profit de ONJOB.*

5. *Ecrire le programme dual. Quelle interprétation peut-on donner à ce programme ?*

6. *En déduire la solution pour ce problème. Interpréter.*

7. **Analyse de sensibilité** *: l'objectif est d'analyser graphiquement la sensibilité de la solution optimale lorsque des changements sont effectués sur la capacité horaire d'une des deux machines M_1 ou M_2.*

   (a) *Utiliser la méthode graphique pour résoudre le programme obtenu dans la question 1.*

   (b) *Si la capacité horaire h de la machine M_1 est passé de 8 heures à 9 heures; analyser graphiquement la nouvelle solution optimale (on explicitera ce point sur le graphique).*

   (c) *L'entreprise ONJOB a-t-elle intérêt à accepter cette heure-machine supplémentaire ? Justifier.*

   (d) *Le ratio du changement de l'optimum z résultant du changement de la disponibilité de la machine peut être calculé comme suit : $r = \frac{\Delta z}{\Delta h}$. Calculer le ratio obtenu. Analyser et interpréter le résultat obtenue.*

Exercice B.18. *On considère le problème primal suivant:*

$$\begin{aligned} \min f(x) = & 16500x_1 + 2500x_2 + 21300x_3 \\ s.c. \quad & 5x_1 + x_2 + 9x_3 \geq 3 \\ & 7x_1 + x_2 + 7x_3 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

1. *Calculer le problème dual et le mettre sous forme standard. Donner le type et le rôle des variables utilisées.*

2. *En appelant y_3, y_4 et y_5 les variables d'écart dans le dual, montrer que l'ensemble $\{y_3, y_4, y_5\}$ constitue une base réalisable.*

3. *Résoudre le problème dual par la méthode du simplexe.*

4. *Que vaut la fonction objectif du problème initial à l'optimum ? Pour quelles valeurs cet optimum est-il atteint (utiliser le théorème de la dualité) ?*

Exercice B.19. *On donne le programme suivant :*

$$\begin{aligned}
&\max \quad f(x) = 10x_1 + 20x_2 \\
&\quad s.c. \\
&\qquad 5x_1 + 3x_2 \leq 30 \\
&\qquad 3x_1 + 6x_2 \leq 36 \\
&\qquad 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\
&\qquad x_1,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

1. *Ecrire sous forme matricielle le programme.*

2. *Ecrire la forme standard pénalisée du programme.*

3. *Résoudre le programme par la méthode du simplexe.*

4. *Donner le dual du programme. En déduire sa solution optimale.*

Exercice B.20. *On donne le programme suivant :*

$$\begin{aligned}
&\min \quad f(x) = x_1 + x_2 \\
&\quad s.c. \\
&\qquad 3x_1 + x_2 \geq 3 \\
&\qquad x_1 - 3x_2 \leq 3 \\
&\qquad x_1,\ x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

1. *Résoudre par la méthode graphique le programme.*

2. *Écrire la forme standard du programme.*

3. *Donner le dual du programme.*

4. *Résoudre par la méthode du grand M le programme.*

Exercice B.21. *On donne le programme suivant :*

$$\min \quad f(x) = 4x_1 - x_2 + 2x_3$$
$$s.c.$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \geq 3$$
$$x_1, \; x_2 \geq 0.$$

1. *Ecrire le programme sous forme standard.*

2. *Résoudre le programme par la méthode à 2-phases le programme.*

Exercice B.22. *Nous reprenons le modèle de l'exercice B.5.*

1. *Si les deux biens produits sont entiers, faite une représentation faisant apparaître l'ensemble admissible.*

2. *En déduire le programme de production optimal en nombres entiers.*

Exercice B.23. *Résoudre par la méthode graphique le programme linéaire en nombres entiers suivant:*

$$\begin{aligned} \max f(x) = \; & 3x_1 + 5x_2 \\ s.c. \qquad & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 6x_1 + 8x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \; \textit{entiers} \geq 0 \end{aligned}$$

Exercice B.24. *On donne le programme suivant :*

$$\max \quad f(x) = 5x_1 + x_2$$
$$s.c.$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$4x_1 + x_2 \leq 12$$
$$x_1, \; x_2 \geq 0, \; \textit{entières}.$$

1. *Résoudre graphiquement le programme.*

2. *Ecrire la relaxation continue du programme.*

3. *Résoudre le programme par la méthode de coupe de Gomory.*

C Quelques devoirs et examens corrigés

Devoir C.1.

Exercice C.1. *On considère le problème primal suivant:*

$$\begin{aligned} \min f(x) =& 16500x_1 + 2500x_2 + 21300x_3 \\ s.c. \qquad & 5x_1 + x_2 + 9x_3 \geq 3 \\ & 7x_1 + x_2 + 7x_3 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

1. *Calculer le problème dual et le mettre sous forme standard. Donner le type et le rôle des variables utilisées. 3 points*

   Réponse: (1 point pour le dual + 1 point pour forme standard + 0.5 point le type + 0.5 point le rôle)

   Le problème dual est donné par :

$$\begin{aligned} \max \ g(y) =& 3y_1 + 4y_2 \\ s.c. \qquad & 5y_1 + 7y_2 \leq 16500 \\ & y_1 + y_2 \leq 2500 \\ & 9y_1 + 7y_2 \leq 21300 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   La forme standard est obtenu par l'introduction des variables d'écart notées y_3, y_4 et y_5. Ainsi on obtient:

$$\begin{aligned} \max \ g(y) =& 3y_1 + 4y_2 \\ s.c. \qquad & 5y_1 + 7y_2 + y_3 = 16500 \\ & y_1 + y_2 + y_4 = 2500 \\ & 9y_1 + 7y_2 + y_5 = 21300 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0 \end{aligned}$$

   Type: variables d'écart. Rôle: Les variables d'écart permettent de saturer les contraintes (mais aussi d'avoir une solution de base réalisable).

2. *En appelant y_3, y_4 et y_5 les variables d'écart dans le dual, montrer que l'ensemble $\{y_3, y_4, y_5\}$ constitue une base réalisable. 1.5 points*

Réponse:

Le système $\begin{cases} 5y_1 + 7y_2 + y_3 = 16500 \\ y_1 + y_2 + y_4 = 2500 \\ 9y_1 + 7y_2 + y_5 = 21300 \end{cases}$ *possède une infinité de solutions. Les solutions réalisables du problème sont les solutions positives de ce système d'équations (car* $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0$*).*

On peut considérer une première solution réalisable, celle obtenue en donnant à y_1 *et* y_2 *la valeur 0. Ainsi: une solution de base réalisable est donnée par* $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = 16500$, $y_4 = 2500$ *et* $y_5 = 21300$.

3. *Résoudre le problème dual par la méthode du simplexe.* *2 points*

   Réponse:

   La tableau du simplexe est donné par le tableau 29. On en tire la solution optimale. On

i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5		
3	5	$\boxed{7}$	1	0	0	16500	L_1
4	1	1	0	1	0	2500	L_2
5	9	7	0	0	1	21300	L_3
z	3	4	0	0	0	**0**	L_4
2	$\frac{5}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{16500}{7}$	$L_1'=\frac{1}{7}L_1$
4	$\frac{2}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{1000}{7}$	$L_2'=L_2-L_1'$
5	4	0	-1	0	1	4800	$L_3'=L_3-7L_1'$
z	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{4}{7}$	0	0	$-\mathbf{\frac{66000}{7}}$	$L_4'=L_4-4L_1'$
2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	2000	$L_1''=L_1'-\frac{5}{7}L_2''$
1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	500	$L_2''=\frac{7}{2}L_2'$
5	0	0	1	-14	1	2800	$L_3''=L_3'-4L_2''$
z	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\mathbf{-9500}$	$L_2''=L_4'-\frac{1}{7}L_2''$

Table 29: Tableau du simplexe de l'exercice 1.

   obtient: $y_1^* = 500$, $y_2^* = 2000$, $y_3^* = y_4^* = 0$ *et* $y_5^* = 2800$. *La valeur optimale est* $g(y^*) = 9500$.

4. *Que vaut la fonction objectif du problème initial à l'optimum ? Pour quelles valeurs cet optimum est-il atteint (utiliser le théorème de la dualité) ?* *1 point*

   Réponse: (0.5 point + 0.5 point)

La fonction objectif du problème initial à l'optimum est $f(x^*) = 9500$.

Dans le dernier tableau du simplexe, on tire les valeurs pour lesquelles cet optimum est atteint (solution optimale). On a: $x_1^* = \frac{1}{2}$, $x_2^* = \frac{1}{2}$ *et* $x_3^* = 0$.

Exercice C.2. *Une entreprise est capable de produire deux biens* b_1 *et* b_2*. Ces productions font intervenir deux facteurs fixes : la main d'oeuvre et des équipements. L'emploi de la main d'oeuvre est rigide à la hausse et à la baisse, la quantité disponible étant égale à 2. La capacité de production des équipements est égale à 1 et ils n'interviennent que pour la production du second bien. On veut maximiser la marge sur coût variable, les marges unitaires étant de 15000 FCFA et 10000 FCFA, respectivement.*

La main d'oeuvre et les équipements nécessaire pour la production d'une unité des biens est donné dans le tableau suivant:

	main d'oeuvre	*équipements*
b_1	*2*	-
b_2	*1*	*1*

1. *Ecrire le programme correspondant. Le mettre sous forme matricielle.* *4 points*

   Réponse: (3 points pour le programme (1 point pour les variables, 1 point pour les contraintes et 1 point pour la fonction objectif) + 1 point pour forme matricielle)

   variables: Soient x_i*= la quantité de biens* b_i *à fabriquer,* $i = 1, 2$.

   fonction objectif: $\max 15\ 000x_1 + 10\ 000x_2$

   contraintes:

   $2x_1 + x_2 \leq 2$ *(main d'oeuvre)*

   $x_2 \leq 1$ *(équipements)*

   Le programme à résoudre est le suivant:

$$\begin{aligned} \max\ f(x) =& 15\ 000x_1 + 10\ 000x_2 \\ s.c. \qquad & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

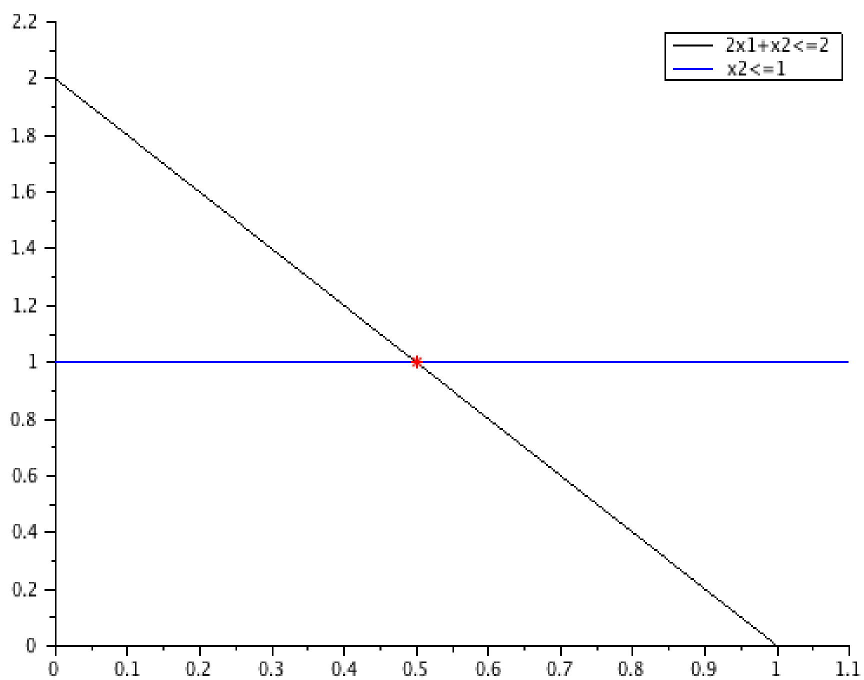
Matriciellement, on peut écrire le programme sous la forme:

$$\max\ c^T x$$
$$s.c. \quad Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

avec $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 15\ 000 \\ 10\ 000 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. *Résoudre graphiquement le programme obtenu. En déduire le programme de production optimal.*   *2 points*

   Réponse:



La résolution graphique est représentée sur la figure. La solution est au point B qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *La valeur optimale est de* $f(B) = 15000 * \frac{1}{2} + 10000 * 1 = 17\ 500$.

NB: Mon échelle est par 1 c = 0.1 cm en abscisse et 1 c = 0.2 cm en ordonnée.

3. *Résoudre le programme numériquement en utilisant l'algorithme du simplexe.*   *2.5 points*

   Réponse: (0.5 point pour la forme standard + 2 points pour la résolution)

La forme standard est obtenu par l'introduction des variables d'écart notées x_3 et x_4. Ainsi on obtient:

$$\begin{aligned}
\max\ f(x) =& 15\ 000x_1 + 10\ 000x_2 \\
s.c.\qquad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
& x_2 + x_4 = 1 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

La tableau du simplexe est donné par le tableau 30. On en tire la solution optimale. On

i	x$_1$	x$_2$	x$_3$	x$_4$		
3	$\boxed{2}$	1	1	0	2	L_1
4	0	1	0	1	1	L_2
z	15000	10000	0	0	**0**	L_3
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$L_1^{'}=\frac{1}{2}L_1^{'}$
4	0	$\boxed{1}$	0	1	1	$L_2^{'}=L_2$
z	0	2500	-7500	0	**-15000**	$L_3^{'}=L_3-15000L_1^{'}$
1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$L_1^{''}=L_1^{'}-\frac{1}{2}L_2^{''}$
2	0	1	0	1	1	$L_2^{''}=L_2^{'}$
z	0	0	-7500	-2500	$-$**17500**	$L_3^{''}=L_3^{'}-2500L_2^{''}$

Table 30: Tableau du simplexe de l'exercice 2.

obtient: $x_1^* = \frac{1}{2}$, $x_2^* = 1$ et $x_3^* = x_4^* = 0$. La valeur optimale est $f(x^*) = 17500$.

4. *Illustrer sur le graphique le chemin suivi par l'algorithme du simplexe.* *1 point*

   Réponse:

   Le chemin suivi par le simplexe est illustré dans la figure. Les points parcourus sont $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et ensuite l'optimum $B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. *Ecrire le dual. Interpréter ce programme et en déduire sa solution optimale.* *1.5 points*

   Réponse: (1 point + 1 point + 0.5 point)

Le programme dual est donné par: (1 point)

$$\begin{aligned} \min \ g(y) =& 2y_1 + y_2 \\ s.c. \qquad & 2y_1 \geq 15\ 000 \\ & y_1 + y_2 \geq 10\ 000 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Interprétation: (1 point)

Ici, on miminime l'utilisation des ressources constituées des facteurs fixes que sont la main d'oeuvre et les équipements.

Solution: (0.5 point)

Elle est déduite à partir du dernier tableau du simplexe. On a: $y_1^* = 7500$, $y_2^* = 2500$ *et* $g(y^*) = 17500$.

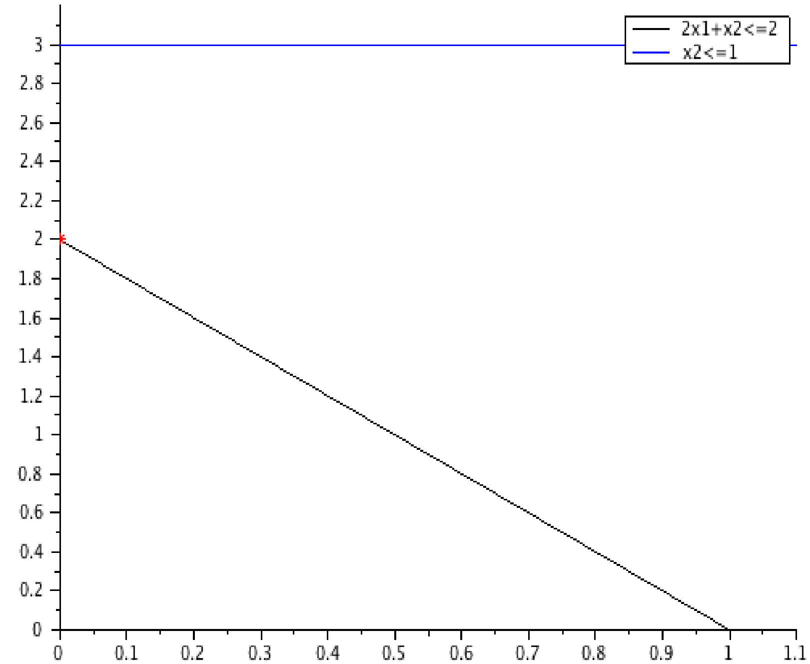
6. *Si la capacité de production des équipements passe de 1 à 3, analyser graphiquement si la solution optimale change. Si oui, donner la nouvelle valeur obtenue.* *2 points*

Réponse: (1 point + 1 point)

On doit résoudre dans ce cas le problème suivant:

$$\begin{aligned} \max \ f(x) =& 15\ 000x_1 + 10\ 000x_2 \\ s.c. \qquad & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La résolution graphique est représentée sur la figure suivante: (1 point)



Oui, la solution change. (1 point)

ELle est maintenant au point D qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. *La valeur optimale est de* $f(D) = 15000 * 0 + 10000 * 2 = 20\ 000$.

Devoir C.2.

Exercice C.3. *Une entreprise familiale basée à Ngaye Mékhé, dans la région de Thiès, vend des chaussures de fabrication artisanale. Malick et ses deux soeurs, Adama et Astou, travaillent à la fabrication et à la vente de deux types de chaussures : des sandales et des mocassins. Malick s'occupe de l'assemblage de chaque chaussure, Adama fabrique les composants de chaque chaussure, alors que Astou est en charge de la prise de commandes et de la livraison des chaussures. Malick et Adama sont disponibles jusqu'à 40 heures par semaine, alors que Astou peut travailler jusqu'à 20 heures par semaine dans l'entreprise familiale. Les temps requis pour chaque tâche en fonction du type de chaussures, de même que les profits pour chaque type de chaussure, sont donnés dans le tableau suivant. Le problème consiste à déterminer combien de sandales et mocassins doivent être fabriqués à chaque semaine de façon à maximiser le profit total.*

1. *Formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation linéaire.* $\boxed{\textit{4 points}}$

   Solution:

   Soient x_1= *le nombre d'unités de chaussures sandales à fabriquer et* x_2= *le nombre d'unités*

Tâche	**sandales** (heures/unité)	**mocassins** (heures/unité)
assemblage	6	4
fabrication des composants	8	4
prise de commandes et livraison	3	3
profit/unité(€)	350	250

de chaussures mocassins à fabriquer.

Le problème est donc modélisé par le problème de programmation mathématique suivant:

$$\begin{aligned} \max f(x) = \ & 350x_1 + 250x_2 \\ s.c. \qquad & 6x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ & 8x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2. *Donnez l'écriture matricielle du programme obtenu.* $\boxed{\textit{2 points}}$

Solution:

Matriciellement, on peut écrire le programme sous la forme:

$$\begin{aligned} \max \ & c^T x \\ s.c. \ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

avec $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 350 \\ 250 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $b = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}$.

3. *Donnez la forme standard du programme.* $\boxed{\textit{1 point}}$

Solution:

La forme standard est donnée par:

$$\begin{aligned} \max f(x) = \quad & 350x_1 + 250x_2 \\ s.c. \quad & 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 40 \\ & 8x_1 + 4x_2 + x_4 = 40 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_5 = 20 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

avec x_1, x_2 les variables initiales; et x_3, x_4, x_5 les variables d'écart.

4. *Résolution avec l'algorithme du simplexe.* $\boxed{\textit{4 points}}$

   Solution:

   Le dernier tableau du simplexe est donné par le tableau suivant:

3	0	0	1	-$\frac{1}{2}$	-$\frac{20}{3}$	$\frac{20}{3}$
1	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$
2	0	1	0	-$\frac{1}{4}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$
z	0	0	0	-25	-50	**-2000**

   On en tire la solution optimale. On obtient: $x_1^* = \frac{10}{3}$, $x_2^* = \frac{10}{3}$, $x_3 = \frac{20}{3}$ *et* $x_4^* = x_5^* = 0$. *La valeur optimale est* $f(x^*) = 2000$.

5. *En déduire le programme de production optimal de l'entreprise familiale.* $\boxed{\textit{1 point}}$

   Solution:

   Pour maximiser son profit total, l'entreprise familiale doit plutôt chercher à fabriquer une quatité de $\frac{10}{3}$ de sandales et $\frac{10}{3}$ de mocassins. Le profit total est de 2000 €.

   NB: On pourrait penser à prendre la partie entière (± 1) pour la production des sandales et des mocassins.

6. *Formulez le dual de ce problème et proposez une interprétation de la signification des variables duales. En déduire sa solution optimale.* $\boxed{\textit{3 points}}$

   Solution:

   $\boxed{\textit{1.5 points}}$ *programme dual:*

$$\begin{aligned} \min \ g(y) = \quad & 40y_1 + 40y_2 + 20y_3 \\ s.c. \quad & 6y_1 + 8y_2 + 3y_3 \geq 350 \\ & 4y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 250 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$\boxed{0.5 \text{ point}}$ *Interprétation: ici on minimise l'utilisation des ressources humaines en nombre d'heures de Malick, Adama et Astou.*

$\boxed{1 \text{ point}}$ *Solution du dual: elle est déduite à partir du dernier tableau du simplexe. On a:* $y_1^* = 0,\ y_2^* = 25,\ y_3^* = 50$ *et* $g(y^*) = 2000$.

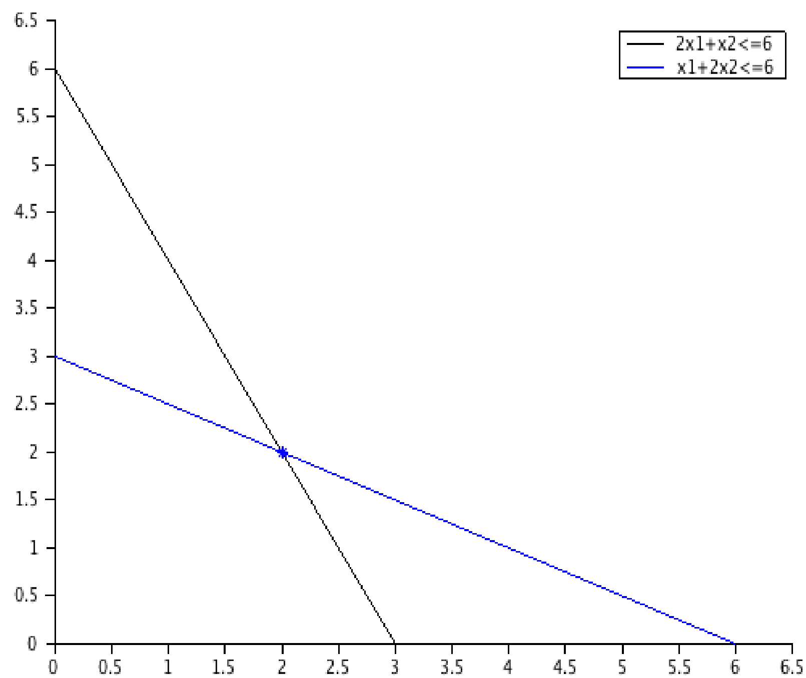
Exercice C.4. *On considère le problème de programmation linéaire suivant:*

$$\max f(x) = 3x_1 + 2x_2$$
$$s.c. \quad 2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

1. *Utilisez la méthode graphique pour résoudre ce programme.* $\boxed{3 \text{ points}}$

   Solution:

   $\boxed{2 \text{ points}}$ *Le domaine réalisable est représentée sur la figure.*



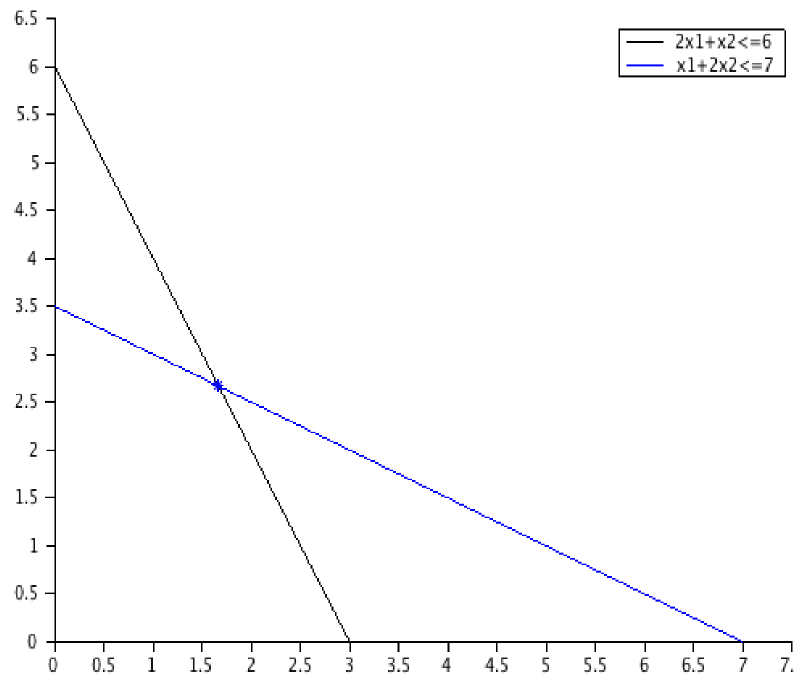
$\boxed{1 \text{ point}}$ *La solution est au point A de coordonnées* $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. *La valeur optimale est de* $f(B) = (3 * 2) + (2 * 2) = 6 + 4 = 10$.

2. *On suppose que la capacité de la deuxième contrainte est passée de 6 à 7. Etudier graphiquement les conséquences sur la solution optimale.* $\boxed{\textit{3 points}}$

Solution:

Si la capacité de la deuxième contrainte passe de 6 à 7, la nouvelle solution est donnée par le point $B = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$, *avec comme valeur optimale* $f(B) = (3 * \frac{5}{3}) + (2 * \frac{8}{3}) = \frac{31}{3} = 10.3333$.

La figure est donnée par:



<u>NB</u>: on peut représenter la nouvelle droite d'équation $x_1 + 2x_2 = 7$ *sur la même figure que la précédente.*

Examen C.1.

Exercice C.5. Questions de cours: (5 points)

1. *Donner les trois étapes de la formulation d'un problème d'optimisation.* *1 point*

2. *Donner la forme matricielle d'un programme linéaire ainsi que son dual.* *2 points*

3. *Énoncer les deux critères de Dantzig et le test d'optimalité de l'algorithme du simplexe.* *2 points*

Corrigé

1. *La formulation d'un problème d'optimisation comporte toujours les trois étapes suivantes :*

    (a) *choix des variables du modèle,*

    (b) *formulation de l'objectif (ou critère),*

    (c) *formulation des contraintes.*

2. *Soit n le nombre de variables et p le nombre de contraintes. Posons:* $c^T = (c_1, c_2, ..., c_n)$[6] *le vecteur des coefficients de la fonction objectif;* $b^T = (b_1, b_2, ..., b_p)$ *le vecteur du second membre, c'est à dire des bornes supérieures. Soit A la matrice de p lignes et n contraintes, notée $A(p, n)$:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

et $x^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le vecteur des variables de décision.

La forme matricielle d'un programme linéaire s'écrit alors en trois (3) lignes:

$$\begin{aligned} \max \; & c^T x \\ s.c. \; & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

3. - **Premier critère***: On fait entrer dans la base le vecteur A_k tel que la quantité $\epsilon_k - c_k$ (si l'on maximise la fonction objectif) ou $c_k - \epsilon_k$ (si on minimise) soit en valeur absolue aussi grande que possible.*

    - **Deuxième critère***: On fait sortir de la base le vecteur A_i pour lequel $\lambda = \frac{x_i}{t_{ik}}$ est aussi petit que possible (mais positif).*

    Test d'optimalité*: Cette transformation est à faire jusqu'à ce que tous les coûts marginaux des variables x_k soient négatives ou nulles.*

[6] c^T désigne la transposé du vecteur c

Exercice C.6. *On considère le programme linéaire suivant:*

$$
\begin{aligned}
\max\ f(x) = &-9x_1 + 25x_2\\
s.c. \qquad & 2x_1 + 5x_2 \geq 12\\
& -2x_1 + 5x_2 \leq 10\\
& x_1 - 2x_2 \geq 4\\
& x_1 \geq 2\\
& x_1 \leq 7\\
& x_2 \geq 1\\
& x_2 \leq 4
\end{aligned}
$$

1. *Faire une résolution graphique soignée. On fera apparaître clairement la région réalisable et la solution optimale.*   *2.5 points*

2. *En vous servant du graphique obtenu à la question 1., déterminer et justifier rapidement si les points $A(2,1)$, $B(5,1)$ et $C(6,1)$ sont:*   *(1.5 points)*

   - *des solutions de base,*
   - *des solutions de base réalisable.*

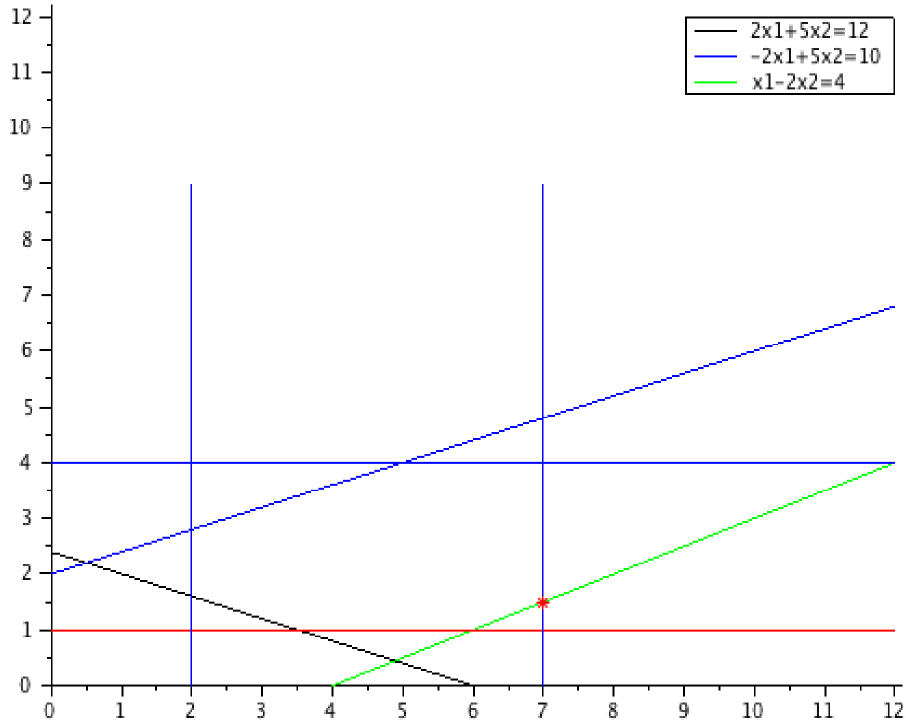
3. *Nous souhaitons à présent résoudre le problème avec l'algorithme du simplexe.*

   (a) *Écrire le problème sous forme standard.*   *1.5 points*

   (b) *Donner* **uniquement le premier tableau** *du simplexe.*   *1.5 points*

Corrigé

1. *Résolution graphique.*   *(2.5 points)*



La résolution graphique est représentée sur la figure, où nous avons 3 points candidats: $E_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3/2 \end{pmatrix}$, *La solution est au point* E_3 *qui a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} 7 \\ 3/2 \end{pmatrix}$. *La valeur optimale est de* $f(E_3) = f\begin{pmatrix} 7 \\ 3/2 \end{pmatrix} = -9 * 7 + 25 * 3/2 = -25.5.$

2. *(0.5 point par point)*
$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ *ne sont pas réalisables car n'appartiennent pas au domaine admissible.*
et $C = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = E_1$*: est une solution de base réalisable.*

3. *La forme standard est donnée par (avec M très grand):* *(1.5 points)*

$$\begin{aligned}
\max\ f(x) = &-9x_1 + 25x_2 - M(x_4 + x_7 + x_9 + x_{12}) \\
s.c. \qquad & 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 12 \\
& -2x_1 + 5x_2 + x_5 = 10 \\
& x_1 - 2x_2 - x_6 + x_7 = 4 \\
& x_1 - x_8 + x_9 = 2 \\
& x_1 + x_{10} = 7 \\
& x_2 - x_{11} + x_{12} = 1 \\
& x_2 + x_{13} = 4 \\
& x_1, x_2, ..., x_{13} \geq 0
\end{aligned}$$

où:

x_1 *et* x_2 *sont les variables initiales,*

$x_3, x_5, x_6, x_8, x_{10}, x_{11}$ *et* x_{13} *sont les variables d'écart,*

x_4, x_7, x_9 *et* x_{12} *sont les variables artificielles.*

4. *La forme standard peut aussi s'écrire en tirant les variables artificielles:* *(0.5 point)*

$x_4 = 12 - 2x_1 - 5x_2 + x_3,$

$x_7 = 4 - x_1 + 2x_2 + x_6,$

$x_9 = 2 - x_1 + x_8,$

$x_{12} = 1 - x_2 + x_{11}.$

$$\begin{aligned}
\max\ f(x) = &(-9 + 4M)x_1 + (25 + 4M)x_2 - Mx_3 - Mx_6 - Mx_8 - Mx_{11} - 19M \\
s.c. \qquad & 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 12 \\
& -2x_1 + 5x_2 + x_5 = 10 \\
& x_1 - 2x_2 - x_6 + x_7 = 4 \\
& x_1 - x_8 + x_9 = 2 \\
& x_1 + x_{10} = 7 \\
& x_2 - x_{11} + x_{12} = 1 \\
& x_2 + x_{13} = 4 \\
& x_1, x_2, ..., x_{13} \geq 0
\end{aligned}$$

Le premier tableau du simplexe est le suivant: *(1 point)*

i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}		
4	2	5	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	L_1
5	-2	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	10	L_2
7	1	-2	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	4	L_3
9	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	2	L_4
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	7	L_5
12	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	1	L_6
13	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	L_7
z	-9+4M	25+4M	-M	0	0	-M	0	-M	0	0	-M	0	0	**0**	L_8

Remarque: *On peut aussi représenter le tableau sans mettre les colonnes x_4, x_7, x_9 et x_{12}.*

Exercice C.7. *Une entreprise fabrique des produits I, II et III à partir de ressources. Le tableau ci-dessous donne les consommations par unité de produit fabriqué.*

	I	*II*	*III*	*disponibilité des ressources*
heure-machine	*2*	*3*	*1*	*10*
matière première	*1*	*4*	*3*	*15*

Les recettes fournies par unité de produit fabriqué sont respectivement 6, 4 et 5 kFCFA.

1. *Formuler le problème sous la forme d'un programme linéaire qui maximise les recettes.* *2 points*

2. *Résoudre le programme obtenu par la méthode du simplexe. En déduire un plan de production. Est-il unique ?* *3 points*

3. *Interpréter les variables duales du problème. Peut-on les trouver dans le tableau optimal du simplexe ?* *1.5 point*

4. *L'entreprise pourrait disposer d'une heure-machine supplémentaire au prix de 3 kFCFA; a-t-elle intérêt à accepter cette offre ? et si on lui propose plutôt une unité de matière première au prix de 1/2 kFCFA ?* *1.5 points*

Corrigé

1. *variables: Soient* x_i= *la quantité fabriquée pour le produit* i *avec* $i = 1, 2, 3$.

   fonction objectif: $\max\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3$

   contraintes:

   $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10$ *(heure-machine)*

   $x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 15$ *(matière première)*

   Le programme à résoudre est le suivant:

$$\begin{aligned} \max\ f(x) = {} & 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ s.c. \qquad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2. *La forme standard ainsi que le tableau du simplexe sont donnés respectivement par :* *(2 points)*

$$\begin{aligned} \max\ f(x) = {} & 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ s.c. \qquad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ & x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_5 = 15 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
4	$\boxed{2}$	3	1	1	0	10	L_1
5	1	4	3	0	1	15	L_2
z	6	4	5	0	0	**0**	L_3
1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	5	$L_1^{'}=\frac{1}{2}L_1$
5	0	$\frac{5}{2}$	$\boxed{\frac{5}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	1	10	$L_2^{'}=L_2-L_1^{'}$
z	0	-5	2	-3	0	**-30**	$L_3^{'}=L_3-6L_1^{'}$
1	1	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	3	$L_1^{''}=L_1^{'}-\frac{1}{2}L_2^{''}$
3	0	1	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	4	$L_2^{''}=\frac{2}{5}L_2^{'}$
z	0	-7	0	$-\frac{13}{5}$	$-\frac{4}{5}$	**-38**	$L_3^{''}=L_3^{'}-2L_2^{''}$

   On a: $x_1^* = 3$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 4$ *et* $f(x^*) = 38 \times 10^3 = 38\ 000$. *(0.5 point)*

   D'où le plan de production: pour maximiser la recette, l'entreprise doit produire 3 quantités *du produit I, et 4 du produit III avec un profit de 38 000 FCFA.*

On est en face d'un programme dont la résolution donne une solution unique (les coûts des variables hors base sont négatives). *(0.5 point).*

3. *Dans le dual on minimise l'utilisation des ressources utilisées pour la fabrication des produits I, II, III.*

   Les variables y_1 et y_2 sont les nombres d'heures d'utilisation et de matières premières des ressources 1 et 2. *(1 point)*

   OUI, *on peut bien les retrouver dans le tableau du simplexe.* *(0.5 point)*

   On a: $\begin{cases} y_1^* = \frac{13}{5} = 2.6 \\ y_2^* = \frac{4}{5} = 0.8 \\ f(y^*) = 38\ 000. \end{cases}$

4. (*a*) *Si l'entreprise dispose d'une heure-machine supplémentaire au prix de 3 kFCFA, on peut résoudre le problème suivant:*

$$\begin{aligned} \max\ f(x) &= 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ s.c. \qquad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ & x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

   où la variable x_4 représente un produit quelconque fabriqué à partir de l'heure machine supplémentaire.

   La résolution donne (par le simplexe): $\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 0 \\ x_3^* = 5 \\ x_4^* = 5 \\ f(y^*) = 40\ 000 > 38\ 000. \end{cases}$

   Donc l'entreprise **a intérêt** *à prendre cette offre.* *(1 point)*

   (*b*) *Si on propose un unité de matière première au prix de 0.5 kFCFA, on résout :*

$$\max \ f(x) = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 0.5x_4$$

$$s.c. \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 15$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

La résolution donne (par le simplexe): $\begin{cases} x_1^* = 3 \\ x_2^* = 0 \\ x_3^* = 4 \\ x_4^* = 0 \\ f(y^*) = 38\ 000. \end{cases}$

La solution ne change pas $\Longrightarrow$ *donc l'entreprise* **n'a pas intérêt** *à prendre.* *(0.5 point)*

D Les principaux solvers - modeleurs

La résolution manuelle ne peut se faire que pour des petits problèmes. Le recours à l'informatique est indispensable pour des **problèmes de grande dimension**. Pour les problèmes réels, les entreprises font appel à des solveurs professionnels. On appelle `solveur` un programme (ou un sous programme) informatique permettant de résoudre un problème d'optimisation sous contraintes. Nous en citons quelques uns, qui ne concernent pas uniquement ceux de la programmation linéaire en variables continues et de la programmation linéaire en nombres entiers étudiées dans ces chapitres.

D.1 Solveurs libres

- Couenne (Global Optimization and Mixed Integer Nonlinearly Constrained Optimization)
- GLPK (Linear Programming and Mixed Integer Programming)
- LP-SOLVE (Mixed Integer Linear Programming)
- IPOPT (Nonlinearly Constrained Optimization)
- Bonmin (Mixed Integer Nonlinearly Constrained Optimization)
- CLP (Linear Programming)
- R Project (Linear Programming and Nonlinearly Constrained Optimization)

- Python ((Linear Programming, Nonlinearly Unconstrained Optimization and Nonlinearly Constrained Optimization)
- SoPlex80bit (Linear Programming)
- OCTAVE (Linear Programming and Nonlinearly Constrained Optimization)
- SCILAB (Linear Programming and Nonlinearly Constrained Optimization)
- etc.

D.2 Solveurs commerciaux

- CPLEX (Linear Programming, Mixed Integer Linear Programming and Second Order Conic Programming)
- LOQO (Nonlinearly Constrained Optimization)
- GUROBI (Linear Programming, Mixed Integer Linear Programming and Second Order Conic Programming)
- OOQP (Linear Programming)
- FICO-Xpress (Linear Programming, Mixed Integer Linear Programming, Nonlinearly Constrained Optimization and Second Order Conic Programming)
- MINOS (Nonlinearly Constrained Optimization)
- LINDOGlobal (Global Optimization and Mixed Integer Nonlinearly Constrained Optimization)
- MATLAB (Linear Programming, Mixed Integer Linear Programming, Nonlinearly Unconstrained Optimization and Nonlinearly Constrained Optimization)
- SOLVER EXCEL (Linear Programming)
- LANCELOT (Nonlinearly Constrained Optimization)
- Knitro (Complementarity Problems, Mixed Integer Nonlinearly Constrained Optimization, Mathematical Programs with Equilibrium Constraints and Nonlinearly Constrained Optimization)
- etc.

D.3 Modeleurs

- OPL Studio
- AMPL
- GAMS
- AIMMS
- LINGO
- LP-TOOLKIT
- MathPro
- MINOPT
- MPL
- OMNI
- etc.

References

[1] J.C. Culioli, *Introduction à l'optimisation*, 2nd édition, 384 pages, Lybrairie Eyrolles, 2012.

[2] Horst, R., Pardalos, P. and Thoai, N., *Introduction to Global Optimization*, (eds.): 1995, Vol. 3 of Nonconvex Optimization and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[3] Michel Minoux, *Programmation linéaire*. 2nd edition. edition Eyrolles, 2007.

[4] Horst, R. and Thy, H., *Global Optimization: Deterministic Approaches*, Springer, Berlin, 1990.

[5] Dantzig G.B., *Maximisation of Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities*. Activity Analysis of Production and Allocation, T.C. Koopmans ed., New York, Wiley, 1951.

[6] Dantzig G.B., *Computational Algorithm of the Revisited Simplex Method.* Rand Report, R.M. 1266, 1953.

[7] I. Charon, O. Hudry *Introduction à l'optimisation continue et discrète Avec exercices et problèmes corrigés*, Hermès - Lavoisier, 502 pages, 2019.

[8] Eric Jacquet-Lagrèze, *Programmation linéaire.* Ed. Economica, 1998.

[9] Teghem Jacques, *Recherche Opérationnelle - Tome 1 : Méthode d'optimisation.* Edition Ellipse, 624 pages. Collection : Références sciences, 2012.

[10] Janos D. Pinter and Jnos D., *Global Optimization: Scientific and Engineering Case Studies.*, Pintr., Springer, February 28, 2006.

[11] Dantzig, G. B., and Thapa, M. N., *Linear Programming 2: Theory and Extensions.* Springer-Verlag, New York, 2003.

[12] François Phelizon, *Méthodes et Modèles de la recherche opérationnelle de Jean.* éd. Economia.

[13] Dewerra D., Liebling Th.M., Hêche J.F., *Recherche opérationnelle pour ingénieurs tome 1 et tome 2.* éd. Presses polytechniques et universitaires romandes.

[14] Robert Faure, *Précis de Recherche opérationnelle.* éd. Dunod.

[15] Dominique Lacaze, *Optimisation appliquée à l'économie et à la gestion.* éd. Economia.

[16] Desbazeille G. *Exercices et problèmes de Recherche opérationnelle.* éd. Dunod.

[17] De Wolf D., *Cours de Daniel DE WOLF Universités de Villeneuve d'Asq.* Dunkerque, Lille.

[18] Vaivre S.B., Ficano C. *Outils mathématiques de gestion.* éd. Bréal.

[19] Ciarlet P.G., *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation cours et exercices corrigés.* Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, 1998.

[20] Vincent Giard, *Gestion de la production et des flux.* éd. Economica.

[21] Vallin P., Vanderpooten D., *Aide la Décision vue approche par les cas.* éd. Ellipses.

[22] Beaumont C.M. *Mathématiques financières et Recherche opérationnelle en Techniques quantitatives de Gestion* . éd. Ellipses.